SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

4

GODINA VII.
ZAGREB
1956 — 57

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 200. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 40-KB-6-Ž-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

	Strana
Lažanski Marcel, Akceleratori	129
Петросић Владимир, Да брже рачунамо	134
Krajnović Milan, Milijun, bilijun, trilijun	136
Volarić Božena, Radioaktivitet oborina	141
Zanimljivosti i razno: Stogodišnjica smrti Augustin-Louis Cauchy-a. — Još jedan dokaz adicione teoreme za funkciju sinus. — Obrati posveopćenog Pitagorinog poučka. — Na pragu Međunarodne geofizičke godine 1957/58. — Polarna svjetlost 21. I. 1957. — Gdje je pogreška	143
Nove knjige: Varićak-Vernić, Vježbe iz fizike za srednje škole. — Zemlja i svemir br. 2.	149
Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike. — B. Zadaci iz fizike. — C. Rješenja iz matematike. — D. Rješenja zadataka iz fizike	159
Vježbe iz matematike za prijemni ispit	160
Nagrađeni rješavatelji zadataka	160
Rješenje ukrštenice i nagrađeni rješavatelji	3. str. omota
Anketa	3. str. omota
Popis pretplatnika Matemat.-fiz. lista za ovu škol. god.	3. str. omota

Uredivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
JOVANOVIĆ PETAR, prof. VPŠ, Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

Dr. MARKOVIĆ BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VII. BROJ 4 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1956. — 1957.

Akceleratori*

MARCEL LAŽANSKI, Zagreb

1. Općenito. Akceleratori pozitivno ili negativno *nabijenih* nuklearnih čestica su strojevi, u kojima se te čestice ubrzavaju pomoću *električkih polja* do vrlo velikih brzina. Kad su postigli željenu brzinu i prema tome energiju, sudaruju se ti nuklearni projektili s atomima posebno pripremljenih »ciljeva« ili »meta« i tamo izazivaju nuklearne reakcije. Akceleratori se od reaktora razlikuju po tome, što se u ovima nuklearne reakcije postizavaju električki *nenabijenim* neutronima izbačenim kod cijepanja uranove jezgre u lančanoj reakciji. U akceleratorima je dakle energija nuklearnih projektila postignuta umjetno, pomoću vanjskih električkih polja, dok je u reaktorima rezultat unutarnjih nuklearnih procesa.

Akceleratori ne mogu služiti kao izvor energije (nuklearne se centrale baziraju na reaktorima). Upotrebljavaju se isključivo za miroljubive svrhe, i to za osnovna istraživanja u nuklearnoj fizici (struktura atomskih jezgara, svojstva njihovih sastavnih dijelova i sila između tih dijelova, sheme raspadanja i t. d.), za terapiju u medicini (dubinsko liječenje tkiva) i u izvjesnoj mjeri za dobivanje radioaktivnih izotopa, i to onih, koji se u reaktorima ne mogu dobiti.

Pozitivno ili negativno nabijene nuklearne čestice, koje se ubrzavaju u akceleratorima, mogu biti ili *ioni* ili *elektroni*. Od iona uglavnom dolaze protoni i deuteroni (protoni su jezgre atoma vodika, deuteroni jezgre atoma teškog vodika, koji se opet dobiva elektrolizom teške vode). Unatrag nekoliko godina upotrebljavaju se i teški ioni, dušika, kisika i t. d. za neka specijalna istraživanja. No kod akceleratora za najviše energije ubrzavaju se gotovo isključivo protoni i elektroni.

Kako je već istaknuto, ubrzavanje električki nabijenih čestica vrši se u akceleratorima pomoću *električkih polja*. Čim se čestice nađu u električkom polju, počinju se gibati sve brže, a konačna brzina i energija ovise o razlici električkog potencijala, t. j. o električkom naponu između početka i kraja promatrane staze. Ako između te dvije točke postoji napon od jednog volta, zadobit će najmanji pozitivni ili negativni električki naboji, kojih su nosioci protoni i elektroni, određenu količinu energije nazvanu jedan elektron-volt (oznaka 1 *eV*). Iznosi li napon milijun volta, bit će i energija milijun puta veća. Ta se jedinica označuje 1 *MeV*, a još je uvijek više od bilijun puta manja od jedinice za energiju džul ($1\ MeV = 0{,}16.10^{-12}\ J$). Proizlazi otud, da bi za postizavanje što većih energija bili potrebni što veći električki naponi. Time bismo bili ograničeni na energje od nekoliko *MeV*, jer se istosmjernim naponima od nekoliko milijuna volta približujemo granci, što je stavlja elektrotehnika. Bio je međutim pronađen princip ubrzavanja, koji je omogućio, da se prijeđe daleko preko te granice. Po tom principu nuklearne čestice

* Vidi također članak Mayer, Atomski akceleratori, Mat. fiz. list god. III. str. 73.

ne prođu *najedamput* svom razlikom potencijala, nego im energija raste u *malim dozama* u određenom ritmu. Većina akceleratora, baziranih na tom principu, ima jedan nov elemenat, *magnetska polja,* koja svijaju putanju čestica. Budući da je sila od magnetskog polja okomita na smjer gibanja, radnja je jednaka nuli, pa stoga magnetska polja ne mogu pridonijeti povećanju energije čestica.

Prije opisa pojedinih tipova akceleratora, koji se mogu klasificirati prema karakteru električkog i magnetskog polja, opisat ćemo još neke elemente, koji su zajednički svim akceleratorima.

Ubrzavane nuklearne čestice vrlo su dragocjene, pa se ne bi smjelo desiti, da prilikom sudara s molekulama zraka budu izgubljene za svrhu, za koju su predviđene, t. j. bombardiranje postavljenih meta. Zbog toga se ubrzavanje vrši u zatvorenom prostoru, iz koga se isisava zrak *vakuumskim pumpama.*

Kod proizvođenja električkih i magnetskih polja nastaju gubici u obliku topline. Odvođenje topline kod većih akceleratora, gdje prirodno hlađenje više nije dovoljno, preuzima *rashladni sistem* (ventilatori, cirkulacione pumpe za vodu ili ulje).

Radi zaštite ljudi, a koji put i radi zaštite osjetljivih instrumenata od intenzivnog zračenja neutrona, gama-zraka i rentgenskih zraka, potrebno je akceleratore okružiti *zaštitnim slojevima* olova, betona, zemlje ili vode. (Betonski zidovi najvećih akceleratora znaju doseći debljinu od 6 metara).

Iz istog razloga, radi zaštite ljudi, potrebno je akceleratorima upravljati na daljinu. *Sistem upravljanja i kontrole* omogućuje da se potrebne operacije izvrše u ispravnom redoslijedu i da se važne pogonske veličine mjere i signaliziraju, da bi se spriječilo oštećenje ili preopterećenje elemenata akceleratora.

Troškovi gradnje akceleratora i trajanje gradnje ovise, osim o energiji akceleratora, i o organizaciji rada i o tehničkim mogućnostima zemlje. Za prvu orijentaciju može se reći, da se u tehnički vrlo razvijenim zemljama manji akceleratori mogu izgraditi za godinu dana uz troškove od možda sto milijuna dinara; najveći strojevi današnjice za četiri do pet godina, pri čemu se troškovi penju do dvadeset milijardi dinara. Za manje države bi gradnja najvećih akceleratora predstavljala prevelik financijski teret. Stoga se one, ako žele vršiti istraživanja na području visokih energija, moraju osloniti na USA ili SSSR, ili se udružuju i zajednički snose teret gradnje. Tako je nastala Evropska organizacija za nuklearna istraživanja (CERN, 1952.), u kojoj sudjeljuje 12 država, sa sjedištem u Ženevi.

2. Pojedini tipovi akceleratora. Zanemarimo li manja odstupanja, možemo putanje nuklearnih čestica u toku akceleriranja podijeliti na pravocrtne i kružne.

2.1. Akceleratori s pravocrtnim putanjama čestica. U ovu grupu akceleratora, koji nemaju magneta za svijanje putanja čestica, idu elektrostatski i kaskadni generatori te linearni akceleratori.

2.1.1. Elektrostatski generatori (Van de Graaff, 1931.). Preko široke, beskrajne trake, napete preko dva valjka, oko kojih se vrti, prenosi se elektricitet s potencijala zemlje na izoliranu, zaobljenu elektrodu, koja se tim prenošenjem elektriciteta sve više nabija dok ne dođe na potrebni napon prema zemlji. Između te visokonaponske elektrode i mete na potencijalu zemlje stavlja se izolatorska cijev u kojoj se, pod utjecajem istosmjernog električkog polja, kreću ioni ili elektroni izbačeni iz posebnog izvora. Sistemom »električkih leća« (metalnih prstena) može se snop ubrzavanih čestica fokusirati na vrlo malo područje bombardirane mete.

Radi smanjenja potrebnog prostora (kod napona od tri milijuna volta i preko toga potrebne su prostrane prostorije, da električki luk ne bi prekoračio na okolne zidove) stavlja se u modernim izvedbama čitav uređaj u kotao napunjen plinom

pod pritiskom od nekoliko atmosfera. Uza sve to se elektrostatski generatori tek rijetko grade za energije veće od 5 *MeV*. U našoj zemlji (u Ljubljani) dovršava se takav akcelerator za energiju 2 *MeV*.

Karakteristika je Van de Graaffovih akceleratora velika točnost (dobro definirana energija snopa).

2.1.2. Kaskadni generator (Cockcroft i Walton, 1930.). Visoki istosmjerni napon dobiva se serijskim zbrajanjem ispravljenih izmjeničnih napona (koji se opet uzimaju bilo iz transformatora bilo iz manjih generatora na izoliranoj osovini). Iz pojedinih međutočaka odvajaju se naponi za električke leće smještene u evakuiranoj cijevi, za fokusiranje čestica izbačenih iz izvora, isto kao kod elektrostatskih generatora.

Kaskadni se generatori grade za istraživanja u fizici niskih energija (koje obično ne premašuju 2 *MeV*). U Jugoslaviji postoji takav akcelerator u Vinči kod Beograda (1,5 *MeV*).

U ovu bi se grupu mogli svrstati i akceleratori, kod kojih se kaskada svodi na jedan ili dva elementa, pa im je stoga napon ubrzavanja niži, ali su inače u principu građeni kao i veći strojevi. U Zagrebu, Vinči i Ljubljani postoje takvi akceleratori za energiju od 0,2 *MeV*, a primjenjuju se za dobivanje neutrona (odatle naziv »neutronski generator«).

2.1.3. Linearni akceleratori (Wideröe, 1928.). Među prvim ranim idejama o akceleratorima bila je i ta, da se cilindričke elektrode, razmaknute međusobno, nanižu u pravcu, pa da se na njih priključi izmjenični napon, i to na svaku drugu isti pol. Ubrzavane čestice prolaze naizmjence područjem, u kojem nema električkog polja (unutar elektrode) i područjem jakog električkog polja (u pukotini između dviju elektroda). Frekvenciju izmjeničnog napona i duljinu cijevi treba tako prilagoditi, da čestice kod svakog prolaza pukotinom naiđu na isti polaritet električkog polja i tako svakiput zadobiju prirast energije. Osim skromnih početaka nisu se te ideje mogle dalje razvijati zbog tadanjeg stanja elektrotehnike. Tek razvojem ultrakratkovalne i radarske tehnike za vrijeme rata omogućen je nov razvoj linearnih akceleratora. Cilindričke elektrode pretvorile su se sada u rezonatore, u kojima stojni ili progresivni elektromagnetski valovi vrše akceleraciju čestica, a potrebnu energiju daju specijalne cijevi (magnetroni i klistroni).

Linearnim akceleratorima, kojih u našoj zemlji nema, ubrzavaju se ili protoni (dosad do 50 *MeV*) ili elektroni (do 660 *MeV*). Kod manjih energija elektrona, oko desetak *MeV*, služe linearni akceleratori za terapiju u medicini, a u novije doba se jakim strujama iona proizvode veće količine radioaktivnih izotopa.

2.2 Akceleratori s kružnim putanjama čestica. U toku ubrzavanja može polumjer putanja čestica ili ostati bez većih promjena (betatron, sinhrotron) ili se postupno povećavati, tako da je putanja u biti spirala (ciklotron, sinhrociklotron).

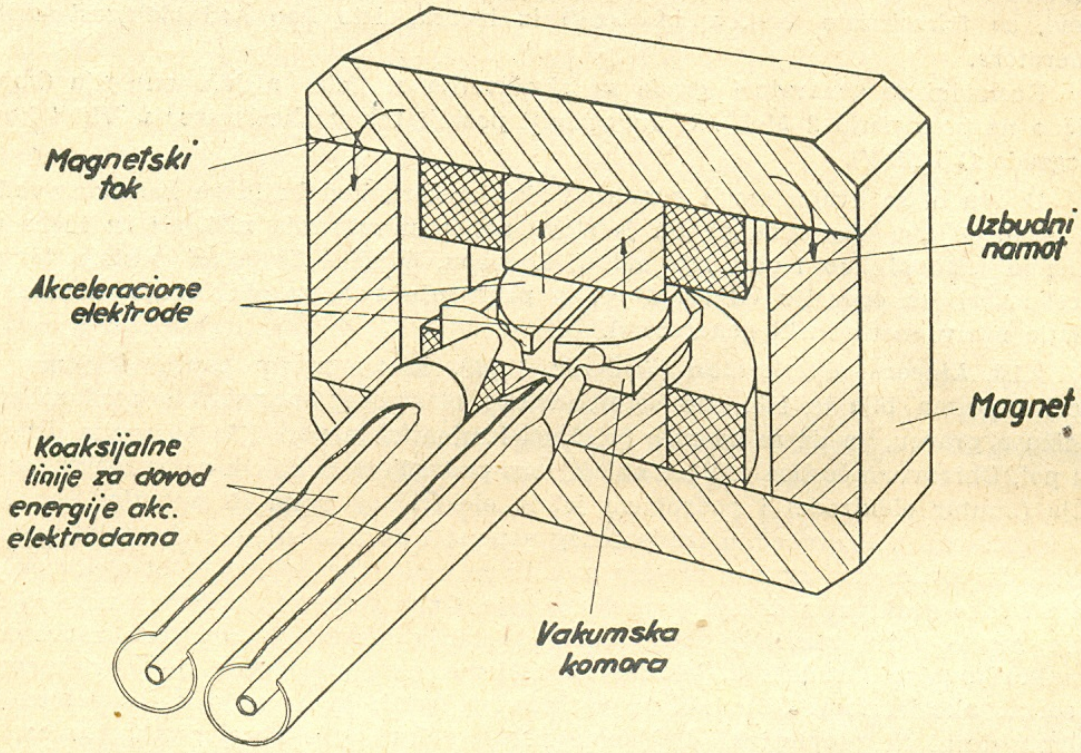
2.2.1. Betatron (Slepian, 1922.). Po svom principu rada betatron je vrlo sličan električkom transformatoru. Namot stavljen oko srednjeg stupa proizvodi izmjenični magnetski tok, zbog kojeg se javljaju inducirana električka polja. Dok se u običnom transformatoru inducirano električko polje iskorišćuje u sekundarnom namotu, upotrebljava se u betatronu direktno za ubrzavanje elektrona u evakuiranoj kružnoj cijevi. Elektroni se u cijev ubacuju u času, kad magnetski tok prolazi nulom, a ubrzavanje jedne grupe elektrona mora biti završeno u času maksimuma toka. (Nakon toga mijenja se smjer induciranog električkog polja, pa bi elektroni bili sve više usporavani).

Maksimalna dosad postignuta energija elektrona u betatronima iznosi 340 *MeV*. Prodorno rentgentsko zračenje koje nastaje kod sudara elektrona s antikatodom od

platine ili volframa na kraju svakog ciklusa akceleracije, iskorišćuje se za dubinsku terapiju i za ispitivanje homogenosti dijelova metalnih konstrukcija.

U Ljubljani postoji betatron energije 30 *MeV*.

2.2.2. Ciklotron (Lawrence, 1930.). Između okruglih polova istosmjernog elektromagneta, dakle u vremenski konstantnom magnetskom polju, nalazi se vakuumska komora, a u njoj dvije polukružne šuplje akceleracione elektrode (sl. 1.), spojene koaksijalnim linijama s izvorom visokofrekventnog napona (kratkovalnim oscilatorom snage oko 100 *kW*). Na koaksijalnim linijama nastaju stojni valovi s maksimumom (protufaznim) kod akceleracionih elektroda, između kojih vlada napon 100



Sl. 1.

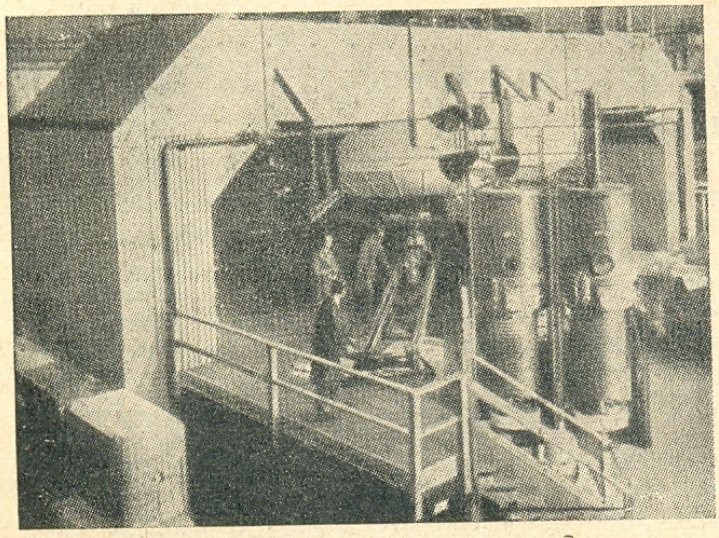
do 200 tisuća volta, frekvencije oko 10 *MHz*. Iz centralno smještenog izvora između akceleracionih elektroda izlaze ioni (ciklotronom se ubrzavaju samo teške čestice, elektroni se njime ne mogu ubrzavati), koje električko polje ubrzava, a magnetsko polje im svija putanju. Kadgod ioni prođu područjem između elektroda, što se dešava stotinjak puta, dobivaju prirast energije (u šupljini unutar svake elektrode praktički nema električkog polja). Uvjet je pritom, da ioni kod svakog prolaza naiđu na ispravan polaritet električkog polja, a taj će biti ispunjen, ako im je kutna brzina jednaka kružnoj frekvenciji napona između elektroda. Ioni pomalo dobivaju sve veću brzinu i energiju, polumjer putanja im stalno raste, dok ne dođu blizu vanjskog ruba akceleracionih elektroda, kada ili udaraju u metu ili ih se izvlači posebnim otklonskim sistemom.

Ciklotroni se upotrebljavaju za istraživanja u fizici i za dobivanje radioaktivnih izotopa u znatnijim količinama, a grade se uz razumne troškove do energije 25 *MeV* za deuterone. U Zagrebu se gradi ciklotron za energiju deuterona 16 *MeV* s mogućnošću ubrzavanja i teških iona.

2.2.3. Sinhrociklotron (McMillan i *Veksler,* 1945.). Sinhrociklotroni i sinhrotroni, najveći akceleratori današnjice, koriste pojavu fazne stabilnosti, otkrivenu na kraju

svjetskog rata nezavisno u USA i SSSR-u. Pokazalo se naime, da nuklearne čestice u magnetskom polju mogu neograničeno dugo oscilirati oko određene faze visokofrekventnog električnog polja i na putanji određenog polumjera bez porasta ili gubitka energije.

Sinhrociklotron je po svom izgledu, naročito po magnetu, sličan ciklotronu. No dok je kod ciklotrona frekvencija električkog polja fiksna, mijenja se ona kod sinhrociklotrona na taj način, da se postepeno smanjuje u toku ubrzavanja jedne grupe iona. Kod energija većih od 25 *MeV* počinje se naime zamjećivati relativistički porast mase. Ubrzavane čestice postaju sve teže, to jest tromije, pa bi zbog smanjene kutne brzine ispale iz koraka s električkim poljem fiksne frekvencije. Pojava fazne stabilnosti dopušta, da se kontinuiranim smanjenjem frekvencije širi stabilna putanja iona, pri čemu im ujedno raste energija, dok ne stignu do izlaznog polumjera. Nakon toga frekvencija opet poraste, pa se može ubrzavati nova grupa iona. Prednost je sinhrociklotrona, da se primjenjuje znatno niži visokofrekventni napon, nego kod ciklotrona, jer ioni u toku ubrzavanja načine nekoliko tisuća okretaja (umjesto stotinjak kod ciklotrona), ali se zato veći zahtjevi stavljaju na vakuumski sistem.



Sl. 2. Sinhrociklotron u Berkeley-u (naprijed se vide vakuum sisaljke)

Sinhrociklotroni najvećih energija vrlo su skupi i veliki strojevi. Najveći sinhrociklotron od 680 *MeV* nalazi se u SSSR-u, nešto manji u USA. U Ženevi gradi CERN sinhrociklotron 600 *MeV*, kojemu je magnet težak 2500 tona, a polovi imaju promjer 5 metara.

2.2.4. Sinhrotroni (McMillan i Veksler, 1945.). Sinhrotrona ima elektronskih i protonskih: kod elektronskih se mijenja frekvencija električkog polja u toku ubrzavanja, kod protonskih i frekvencija i magnetsko polje. Svrha je vremenskog jačanja magnetskog polja, da se čestice u toku akceleracije zadrže na putanjama uglavnom istog promjera, pa se magnet može ograničiti na području u blizini tih putanja. Sinhrotroni su tako dobili prstenaste (toroidalne) magnete, a ubrzavanje vrše akceleracione elektrode smještene duž vakuumske komore pravokutnog ili zaobljenog presjeka. Na početku ubrzavanja moraju čestice već imati neku energiju, pa ih se zato ubacuje u sinhrotron iz Van de Graaffovog ili linearnog akceleratora.

Elektronskim sinhrotronima ubrzavaju se elektroni do 500 *MeV* (USA). Protonski sinhrotrona ima malo zbog velikih troškova i tehničkih zahtjeva. Momentano postoje tri, jedan u Engleskoj (u Birminghamu, 1000 *MeV*) i dva u USA (u Brookhavenu, od gotovo 3000 *MeV*, nazvan »kozmotron« i u Berkeleyu od blizu 6000 *MeV*, nazvan »bevatron«). Berkeleyskim sinhrotronom dobiveni su vrijedni rezultati: eksperimentalno je potvrđeno postojanje antiprotona i antineutrona. Protonski sinhrotron od 1000 *MeV* nalazi se pred završetkom u SSSR-u; težina

magneta mu je 36000 tona. Otkrićem principa »oštrog fokusiranja« *(Courat, Livingston, Snyder,* 1952.) omogućena je gradnja sinhrotrona s mnogo manjom količinom željeza za magnet. Na tom principu temelje se protonski sinhrotroni, koji se grade u Ženevi (25000 *MeV* s magnetom težine 3200 tona i promjera 200 metara) i u Brookhavenu (30000 MeV).

Razvoj međutim nije završen. Sada se intenzivno radi na pronalaženju novih principa ubrzavanja, koji bi omogućili proboj u još viša područja energija. Jer znanost stalno postavlja nova pitanja, a sve jači strojevi treba da dadu odgovor.

Да брже рачунамо

ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЋ, Ниш

Приликом ма каквог посла гледамо да га завршимо што брже, ако то не иде на штету квалитета. Исти је случај и при рачунању. Не треба настојати само да се дође до тачног резултата, премда је то најважније, већ се треба старати да се до њега дође на најбржи начин. То скраћивање рада може да се, између осталог, постигне и на тај начин, што се доста рачунских операција могу извршити и без писања — усмено.

Овде ће бити наведене неке од тих рачунских операција, које се врло мало користе, иако су многе од њих већини ученика познате.

I) Велика таблица множења (II декада). Под великом таблицом множења подразумевамо производе бројева од $10 \cdot 10$ до $19 \cdot 19$. Сваки такав број има облик: $10 + a$, где a претставља цифру јединица. Узмимо два таква броја: $10 + a$ и $10 + b$. Њихов производ је:

$$(10 + a) \cdot (10 + b) = 100 + 10a + 10b + ab = (10 + a + b) \cdot 10 + ab.$$

Како израз у загради претставља збир једног од тих бројева и јединица другога, то за множење ових бројева можемо да изведемо следеће правило: Једном од датих бројева додамо јединице другог, $(10 + a + b)$, овоме збиру допишемо 0, и добијеном броју треба још додати производ јединица датих бројева $(a \cdot b)$.

Примери: $18 \cdot 15 = ?$ $18 + 5 = 23$, овоме допишемо 0 (230) и најзад додамо $8 \cdot 5 = 40$. Производ је 270.

$19 \cdot 13 = ?$ $19 + 3$ је 22, допишемо 0 (220) и додамо $9 \cdot 3 = 27$. Производ је 247.

II) Множење бројева од $20 \cdot 20$ до $29 \cdot 29$ (III декада). Ови бројеви имају облик: $20 + a$. Производ два таква броја: $20 + a$ и $20 + b$ је:

$$(20 + a) \cdot (20 + b) = 400 + 20a + 20b + ab = 2\,(20 + a + b) \cdot 10 + ab,$$

одакле налазимо правило: једном од датих бројева додамо јединице другог, $(20 + a + b)$, овај збир удвостручимо, $2\,(20 + a + b)$, овоме производу допишемо 0 и добијеном броју додамо још производ јединица (ab).

Примери: $21 \cdot 24 = ?$ На 24 додамо 1, (25), овај број удвостручимо (50) допишемо 0, (500), овоме још додамо $4 \cdot 1 = 4$. Дакле, производ је 504.

$28 \cdot 23 = ?$ На 28 додамо 3 (31), ово удвостручимо, (62), допишемо 0 (620), додамо $8 \cdot 3 = 24$. Производ је, дакле, 644.

III) Производ бројева од $30 \cdot 30$ до $39 \cdot 39$ (IV декада). Као и у претходном случају налазимо да је: $(30 + a)\,(30 + b) = 3\,(30 + a + b)\,10 + ab$, одакле закључујемо: једном од датих бројева додају се јединице другог, $(30 + a + b)$, ово утростручимо, $3\,(30 + a + b)$, производу допишемо 0 и најзад добијеном резултату додамо производ јединица, (ab).

Примери: $32 \cdot 33 = ?$ На 32 додамо 3, (35), ово утростручимо, (105) допишемо 0, (1050), и најзад додамо $2 \cdot 3 = 6$. Производ је 1056.

Из изложенога се види како би се множили бројеви из V, VI итд. декаде, но то усмемо множење за следеће декаде бива све мање корисно, јер захтева већи умни напор. Међутим за XI декаду опет постаје врло лако. Овде бисмо имали:

$$(100 + a)\,(100 + b) = (100 + a + b)\,100 + ab.$$

Дакле: једном од датих бројева додамо јединице другог, $(100 + a + b)$, овоме допишемо две нуле и најзад додамо производ јединица (ab).

Пример: $107 \cdot 105 = ?$ На 107 додамо 5, (112), допишемо две нуле (11200) овоме додамо још $7 \cdot 5 = 35$. Производ је 11235.

У свим наведеним случајевима један или оба чиниоца могу да буду и десетни разломци. Множење се врши као да су цели бројеви, а у производу се стави десетна запета на одговарајуће место.

IV) Множење са 5; 50; 500; 0,5 итд. Како је $a \cdot 5 = a \cdot \frac{10}{2} = \frac{a}{2} \cdot 10$; $a \cdot 50 = \frac{a}{2} \cdot 100$ итд., то имамо правило: са 5 (50; 500; 0,5 итд.) множимо неки број, ако половину тога броја помножимо са 10 (100, 1000, 1 итд.).

Примери: $142 \cdot 5 = 71 \cdot 10 = 710$, $64 \cdot 0{,}5 = 32 \cdot 1 = 32$.

V) Множење са 0,25; 2,5; 25; 250 итд. Пошто је: $a \cdot 25 = a \cdot \frac{100}{4} = \frac{a}{4} \cdot 100$, то имамо правило: неки број множимо са 25, (0,25; 2,5; 250 итд.) када четвртину тога броја помножимо са 100 (1; 10; 1000 итд.).

Примери: $164 \cdot 2{,}5 = 41 \cdot 10 = 410$; $96 \cdot 250 = 24 \cdot 1000 = 24000$.

VI) Множење са 125 (0,125; 1,25; 12,5; 1250 итд.). Како је: $a \cdot 125 = a \cdot \frac{1000}{8} = \frac{a}{8} \cdot 1000$ то значи да: неки број множимо са 125 (0,125; 1,25; 12,5; 1250 итд.) када осмину тога броја помножимо са 1000 (1; 10; 100; 10000 итд.).

Примери: $72 \cdot 125 = 9 \cdot 1000 = 9000$; $168 \cdot 1{,}25 = 21 \cdot 10 = 210$.

Разуме се да ћемо усмено рачунати овакве производе само ако је лако наћи осмину датог броја, но и у тежим примерима, чак и при писменом рачунању, лакше је применити овај поступак него обично множење, јер је лакше дељење са 8 него множење са 125.

VII) Множење са 15 (150; 1,5 итд.). Из: $a \cdot 15 = a\left(10 + \frac{10}{2}\right) = \left(a + \frac{a}{2}\right)10$ изводимо закључак: са 15 (150; 1,5 итд.) множимо неки број, ако му прво додамо његову половину, затим тај збир помножимо са 10 (100; 1 итд.).

Примери: $24 \cdot 15 = (24 + 12)\,10 = 360$; $62 \cdot 150 = (62 + 31)\,100 = 9300$.

VIII) Множење бројем чије су све цифре 9 (9, 99, 999 итд.). Како је $a \cdot 9 = a\,(10 - 1) = 10a - a$, $a \cdot 99 = a\,(100 - 1) = 100\,a - a$ итд. то оваквим бројевима множимо неки број a, ако га помножимо декадном јединицом која има онолико нула, колико има деветица у множиоцу и од производа одузмемо множеник.

Примери: $22 \cdot 9 = 220 - 22 = 198$, $35 \cdot 999 = 35000 - 35 = 34965$.

IX) Дељење са 5 (50; 500 итд.). Пошто је: $\frac{a}{5} = \frac{2a}{10}$, $\frac{a}{50} = \frac{2a}{100}$, итд. закључујемо: са 5 (50; 500 итд.) делимо неки број a, ако двоструки тај број поделимо са 10, (100; 1000 итд.).

Примери: $72 : 5 = 144 : 10 = 14{,}4$; $152 : 50 = 304 : 100 = 3{,}04$.

X. Дељење са 2,5 (25; 250 итд.). Из: $\frac{a}{2{,}5} = \frac{4a}{10}$, $\frac{a}{25} = \frac{4a}{100}$ итд. закључујемо: са 2,5 (25; 250 итд.) делимо неки број, ако га помножимо са 4, а затим поделимо са 10 (100; 1000 итд.).

Примери: $48 : 2{,}5 = 192 : 10 = 19{,}2$, $1035 : 250 = 4140 : 1000 = 4{,}14$.

XI) Дељење са 1,25 (12,5; 125; 1250 итд.). Како је: $\frac{a}{1{,}25} = \frac{8a}{10}$, $\frac{a}{12{,}5} = \frac{8a}{100}$ итд. то закључујемо: са 1,25 (12,5; 125, 1250 итд.) делимо неки број, ако га помножимо са 8, а затим поделимо са 10 (100, 1000, 10000 итд.).

Примери: $21 : 1{,}25 = 168 : 10 = 16{,}8$, $206 : 125 = 1648 : 1000 = 1{,}648$.

XII) Израчунавање квадрата бројева који се свршавају на 0. Општи облик таквог броја је $10a$. Како је $(10a)^2 = a^2 \cdot 100$ то, дакле, треба дићи на квадрат број без 0 (10 пута мањи) и добијени степен помножити са 100.

Пример: $130^2 = 13^2 \cdot 100 = 169 \cdot 100 = 16900$.

XIII) Израчунавање квадрата бројева који се завршавају на 5. Општи облик таквог броја је: $10a + 5$. Како је: $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a(a + 1)\,100 + 25$ то закључујемо: број чија је задња цифра 5 квадрира се на тај начин, што се број без последње цифре помножи бројем који је за 1 већи и овом производу се допише 25.

Примери: $35^2 = ?$ Производ $a(a + 1)$ овде је $3 \cdot 4 = 12$. Овоме још допишемо 25 па је коначно: $35^2 = 1225$.

$125^2 = ?$ Како је $12 \cdot 13 = 156$, то је $125^2 = 15625$,
$1{,}05^2 = ?$ Како је $10 \cdot 11 = 110$, то је $1{,}05^2 = 1{,}1025$,
$1150^2 = 115^2 \cdot 100 = ?$ Како је $11 \cdot 12 = 132$, то је $115^2 = 13225$, а $1150^2 = 1322500$.

XIV) Израчунавање квадрата бројева који се завршавају са 1 или 6. Ако је a број који се завршава на 0 или 5, тада је $a + 1$ број који се завршава на 1 или 6. Пошто је $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, то закључујемо: број који се завршава са 1 или 6 квадрирамо када квадрату броја који је за 1 мањи (броја који се завршава на 0 или 5), додамо двоструки тај умањени број и 1.

Примери: $21^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 + 1 = 400 + 41 = 441$
$121^2 = 120^2 + 2 \cdot 120 + 1 = 14400 + 241 = 14641$
$26^2 = 25^2 + 2 \cdot 25 + 1 = 625 + 51 = 676$.

XV) Израчунавање квадрата бројева који се завршавају на 4 и 9. Ако је a број који се завршава на 0 или 5, онда је $a - 1$ број који се завршава на 9 или 4. Како је $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$ то закључујемо: број који се завршава на 9 или 4 квадрирамо на тај начин, што од квадрата броја који је за 1 већи одузмемо двоструки тај увећани број и добијеној разлици додамо 1.

Примери: $29^2 = 30^2 - 60 + 1 = 900 - 59 = 841$
$34^2 = 35^2 - 70 + 1 = 1225 - 69 = 1156$.

Ако је неки од бројева децимални разломак, квадрирамо га као да је цео број и најзад одвојимо потребан број децималних места.

Овде су наведени само неки од многих примера, у којима је могуће извршити рачунање усмено и то они, који се чешће јављају у рачунању, а лако се врше. Онима који неке од наведених примера по први пут покушавају да примене може изгледати да је то усмено рачунање теже и дуже него писмено. После више израђених примера свакако ће да увиде сву корист овог рада. Ако се ради о већим бројевима са којима је тешко рачунати усмено, корисно је наведени поступак применити и при писменом рачунању.

Milijun, bilijun, trilijun, . . .

MILAN KRAJNOVIĆ, Zagreb

»Milijun poljubaca šalje Ti Tvoj Mirko«. Da li je Mirko u matematičkom pogledu svijestan, što je napisao posljednjom rečenicom svog pisma?! No — oprostimo mu, opravdava ga uzbuđenost i pjesnička sloboda. Međutim, ako on, nakon toga, miran, pročita u novinama: »Dok je 1947. godine gledalo domaće filmove oko milijun gledalaca, taj je se broj u 1955. godini popeo na 8 milijuna« — on razabira da se broj povećao 8 puta, no prave predodžbe o tom, kolik je milijun, koliko je to osam milijuna, obično ne će odmah imati. Teško je i može imati, jer je on na stadionu viđao 8 000 gledalaca, jednom je na reprezentativnoj utakmici vidio i 80 000 gledalaca, no 8 000 000 ih nije vidio. U mašti zamišlja 100 »onakvih« krcatih stadiona i time sebi donekle pomaže.

U istim novinama naš Mirko dalje nailazi na slijedeći podatak: »U Jugoslaviji je 1939. godine proizvedeno 1,17 milijardi kilovatsati električne energije, a 1955. godine 4,34 milijardi kilovatsati«. Kako da stvori bar neku grubu sliku o prvom, ili, još radije, o drugom broju? Dozvat će u pomoć na pr. broj stanovnika Jugoslavije i snagu jedne žarulje, pa kombinirati i izračunati, da je proizvodnja elektroenergije u 1955. godini bila oko 250 *kWh* po stanovniku, t. j. kad bi se proizvedena energija jednoliko razdijelila na sve stanovnike, a svaki stanovnik imao jednu žarulju od 50 *W*, svaka takva žarulja mogla bi u 1955. godini gorjeti 5000 sati, dakle preko 13 sati na dan. Ovakvo dovijanje do pojma milijarde svakako je već kompliciranije, jer smo morali preći preko »među-stepenice« milijuna, a sam milijun nam je još prilično »mutan«. Ipak, bolje išta nego ništa, bolje je stvarati i takve grube, polumutne slike, nego posve ravnodušno čitati, pisati i izgovarati takve brojeve.

U svojim udžbenicima Mirko čita: »U čovječjem tijelu ima nekoliko desetaka bilijuna stanica«, »U jednom kubičnom centimetru uzduha nalazi se oko 27 trilijuna molekula«.

Bilijun, trilijun — koliko je to? »Kao što se Botokudima* čini, da ne postoji razlika između 2 i 3, tako i mnogi suvremeni kulturni ljudi smatraju da ne postoji razlika između bilijuna i trilijuna. U krajnjem slučaju oni ne misle, da je jedan od tih brojeva milijun puta veći od drugoga, t. j. da se bilijun odnosi prema trilijunu kao širina ulice prema udaljenosti od Berlina do San Franciska« (Njemački matematičar H. Schubert).

Ovom članku je svrha da pomoću nekih napabirčenih primjera Mirku, njegovoj Miri i mladim čitaocima uopće pomogne u zornijem shvaćanju t. zv. »velikih brojeva«, da im izvjesnim slikama, usporedbama te brojeve i odnose među njima donekle približi.

Rezultatima ne vjeruj! Računaj sam, kontroliraj!

Milijun

(Tisuću tisuća = 1 000 000 = 10^6)

Uzmi dasku, dugu metar i široku metar ,pa joj jednu njenu kvadratnu plohu izlijepi milimetarskim papirom! Pred tvojim očima ostvaren je milijun, pred tobom je milijun kvadratića, milijun kvadratnih milimetara.

Koliko treba da se nabroji do milijuna? Prema jednoj novinskoj vijesti iz god. 1935. dva londonska trgovca sklopila su bila okladu. Jedan je tvrdio da drugi ne će moći brojiti od 1 do 3 000 000. Onaj koji je rekao da će moći brojiti, izgubio je okladu već prvog dana. Kod broja 11 370 počeo mu se plesti jezik, a kod broja 11 402 pao je u nesvijest. Kad bismo brojili 10 sati dnevno, odbrojivši u svakoj sekundi jedan broj (— iskustvo onog londonskog trgovca savjetuje nas, da ne izgovaramo brojeve, već da stavljamo križiće na karirani papir ili nešto slično —) trebali bismo oko mjesec dana, da nabrojimo do milijun. Kad bismo pak mogli izdržati bez sna i »raditi« 24 sata na dan, za takav neprekidan posao u trajanju od milijun sekundi trebali bismo ... (Izračunaj sam!)

Milijun minuta je približno 2 godine, a da prođe milijun dana treba preko 27 stoljeća.

Milijun kovanih dinara, naslaganih jedan na drugi, dalo bi valjkasti stup visok oko 1250 metara.

Za lukobran u sirijskoj luci Latakiji, koju grade naši ljudi, utrošeno je milijun i po kubičnih metara kamena. Zamisli sav taj kamen u obliku kocke; kolik bi joj

---

* Botokudi — indijansko pleme u istočnoj Braziliji. M. K.

bio brid? Kada bismo sav taj kamen stavili u željezničke vagone, a u jedan vagon tovarili 6 m^3, trebali bismo 250 000 vagona. Kompozicija bi bila duga oko 2500 kilometara.

Jugoslavija ima danas oko 18 milijuna stanovnika. Zamislimo, da se svi njeni stanovnici sakupe na jednoj velikoj poljani i da tu logoruju pod šatorima. Uzmimo, da u jednom šatoru stanuju 2 osobe a na jednom hektaru da se postavi prosječno 500 šatora. Koliko bi zemljišta sveukupno trebali? Računajmo: na 1 km^2 došlo bi 50 000 šatora, t. j. 100 000 ljudi; dakle bi za 18 000 000 ljudi trebalo 180 km^2, na pr. poljana duga 18 *km*, a široka 10 *km*.

Milijarda

(Tisuću milijuna = 1 000 000 000 = 10^9)

Traka milimetarskog papira, duga 1 kilometar, a široka 1 metar, sadrži (bez ikakvih bijelih rubova-dakako) milijardu kvadratnih milimetara.

Milijarda sekundi je skoro 32 godine, a milijarda minuta više je od 19 stoljeća.

Biblioteka, u kojoj sve knjige zajedno imaju 1 000 000 000 stranica (ako u prosjeku računamo da 500 stranica daje debljinu od 2 *cm*) zauzimala bi police u ukupnoj duljini od 40 *km*, ili ako uzmemo u obzir i tvrdo ukoričene knjige, recimo 50 *km*.

Volumen svih oceana proračunan je $1\frac{1}{4}$—$1\frac{1}{2}$ milijardi kubičnih kilometara. Kad bismo mogli svu tu vodu sakupiti u jednu kockastu posudu, brid te kocke bio bi dug preko 1000 kilometara.

Milijarda kovanih dinara, slijepljenih svojim bazama, dala bi metalni konop, dug oko 1250 kilometara! Izračunaj, koliko godina bi se iz tog konopa mogle isplaćivati mjesečne zarade od prosječno 15 000 dinara poduzeća od 200 ljudi!

Naš Mirko je filatelista. U svom albumu ima, pored ostalih, i jednu njemačku poštansku marku iz 1923. godine, na kojoj piše »50 milijardi maraka«. Sada, kad je Mirko nešto čvršće zahvatio pojam milijarde, razabrat će da tada, 1923. u Njemačkoj, nešto »nije bilo u redu«, pa će možda nastojati da sazna nešto više o ekonomskoj pojavi, nazvanoj inflacija. Saznat će, na pr. i to da je 31. siječnja 1919. dolar vrijedio 8,57 maraka, 31. prosinca iste godine 48,43 marke, koncem 1921. godine 184 marke, koncem 1922. godine 7350 maraka, a u 1923. godini evo vrtoglavog srozavanja: 30. svibnja dolar vrijedi 1 100 000 maraka, 9. listopada 1,2 milijarde, nakon mjesec dana, t. j. 14. studenoga 1260 milijardi, i najzad 20. studenoga 1923. dolar se obračunavao za 4200 milijardi njemačkih novčanih jedinica.

Sa posljednja dva broja zašli smo već u područje bilijuna. U Mirkovom albumu nalazi se i čitava jedna serija mađarskih maraka iz godine 1946., počevši od 1 bilijun penga pa sve do 500 000 bilijuna (pola trilijuna) penga! Pa da vidimo, koliki je taj bilijun!

Bilijun

(Tisuću milijardi = milijun milijuna = 1 000 000 000 000 = 10^{12})

Milijun naših $1\,m \times 1\,m$ dasaka s nalijepljenim milimetarskim papirom, složenih na livadi od 1 km^2 — evo bilijuna kvadratnih milimetara.

Koliko bi vremena trebalo, da čovjek potroši bilijun dinara, kad bi svakog sata trošio milijun dinara? Izlazi (računaj, ne zaboravljajući prestupne godine!) da bi bilijun bio »spiskan« na početku 115. godine.

Elektron u vodikovom atomu obleti oko jezgre u jednoj sekundi oko 6 i po tisuća bilijuna puta ($6{,}59 \cdot 10^{15}$). To je toliko velik broj, da taj elektron, usprkos svojoj sićušnoj udaljenosti od jezgre ($5{,}29 \cdot 10^{-9}$ *mm* t. j. oko 5 tisućina milimikrona), u jednoj sekundi pređe preko 2 kilometra.

Sjajni Sirius (inače jedna od najbližih zvijezda stajačica) udaljen je od nas oko 85 bilijuna kilometara. Astronomi radije kažu: udaljen je oko 9 godina svjetlosti. Godina svjetlosti, mjerna jedinica za mjerenje svemirskih udaljenosti, iznosi oko $9\frac{1}{2}$ bilijuna kilometara; to je daljina, koju svjetlost prevali u godini dana, svjetlost, koja se rasprostire ogromnom brzinom od 300 000 kilometara u sekundi! Da bismo našem shvaćanju približili brzinu svjetlosti ,a time donekle i godinu svjetlosti i udaljenost Sirusa, zapitajmo se ovo: Koliku dužinu prevali svjetlost u vremenu dok avion, koji leti brzinom od 600 *km/h*, pređe 1 milimetar? Računaj i uvjeri se da svjetlost dotle pređe 1800 metara!

Trilijun

(Milijun bilijuna = 1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18})

Zamislimo tvornicu, koja izradi 1000 šivaćih igala u minuti. U jednom satu ih izradi 60 000. Tisuću takvih tvornica izradilo bi ih u jednom satu 60 milijuna. Radeći dan i noć bez prestanka tih tisuću tvornica trebalo bi raditi gotovo 2 milijuna godina, pa da izrade trilijun igala!

Legendarni izumitelj šahovske igre zatražio je od svog vladara »skromnu« nagradu u zrnima pšenice: na prvo polje šahovske ploče 1 zrno, na drugo 2 zrna, na treće polje 4, na četvrto 8, na peto 16, i t. d. sve do posljednjeg šahovskog polja. Ukupno je sa svih 64 polja trebao u ime nagrade dobiti i otpremiti 2^{64}—1 zrna, t.j.

18 446 744 073 709 551 615 zrna,

okruglo 18 i po trilijuna zrna! Evo nekih slika, koje će nam možda pomoći da donekle shvatimo veličinu tog broja: Ako računamo da u 1 litru stane 20 000 zrna, onda izlazi da izumitelj treba dobiti 922,3 km^3 pšenice. Ta količina zapremala bi kocku s bridom od blizu 10 *km*. Ako uzmemo, da 1 *hl* sadrži približno 75 *kg* pšenice, dobivamo rezultat, da je izumiteljeva nagrada iznosila blizu 700 milijardi tona pšenice, t. j. preko 5000 svjetskih žetvi dvadesetog stoljeća! Recimo, da je izumitelj naumio svoju nagradu otpremiti karavanom deva. Uzmimo da svaka deva nosi 140 *kg*, a u karavani da zaprema dužinu od 5 *m*. Karavana bi bila duga blizu 25 milijardi kilometara, t. j. preko 100 puta dulja od srednje udaljenosti Sunce-Mars. I najzad: kad bismo svih 18 i po trilijuna zrna jednoliko rasporedili po čitavoj Zemljinoj površini, po kopnu i po vodi, na svaki cm^2 Zemlje trebalo bi staviti 3—4 zrna.

U uvodu je spomenut broj od 27 trilijuna molekula u 1 cm^3 uzduha. Te molekule raspoređene jednoliko po površini Zemlje dale bi gustoću od preko 5 molekula na cm^2.

Masa Zemlje iznosi oko 6000 trilijuna tona (točnije $5{,}98 \cdot 10^{27}$ *g*). Evo jedne fantastične pripovijesti o tom broju. Zamislimo da jednog dana stanovnici nekog drugog svemirskog tijela započnu za svoje potrebe odvoziti materijal naše planete. Svake sekunde, danju i noću, bez predaha i bez prekida, dolazi po jedna njihova eskadra od 1000 raketa; u svaku raketu utovare 100 tona (dvadeset 5-tonskih kamiona) Zemljine mase i odlete. Šta mislite, kad će Zemlja biti potpuno raskomadana, kad će je nestati? Za 10 ili za 100 godina? Da li će »izdržati« 1000 godina? Vjerovali ili ne (a bolje je da ne vjerujete, već da sami računate) za čitav pljačkaški posao trebalo bi blizu 2 milijarde godina. Za milijardu godina svemirski invazori raznijeli bi tek nešto više od polovine Zemlje.

...i tako dalje...

Niz prirodnih brojeva nikad ne završava. Čim idemo dalje, tim rjeđe upotrebljavamo posebne nazive (kvadrilijun, kvintilijun...), već se brojevi pišu i izgovaraju u obliku potencije broja 10. Evo nekoliko primjera za daljnje, sve veće i veće brojeve:

Masa Sunca je $1{,}98 \cdot 10^{33}$ grama (333 432 Zemljine). Ispiši nulama!

Broj atoma u svemiru, dosad obuhvaćenom teleskopima, cijene neki na $3 \cdot 10^{74}$. Ispiši, ako imaš dovoljno strpljenja!

Sveukupni broj svih mogućih šahovskih partija iznosi $10^{18\,900}$. (Vidi knjigu N. Petrovića: Šahovski problem, Zagreb 1949., str. 185.) Ispiši taj broj nulama samo ako si se s nekim okladio, a imaš vremena za bacanje! Trebalo bi napisati 1 pa iza toga 18 900 nula! Koliko bi vremena trebalo, da se odigraju sve te partije? Zamislimo da na našem planetu 2 milijarde ljudi (na 10^9 šahovskih ploča) igra šah, dnevno 10 partija. U 3 godine odigralo bi se otprilike 10^{13} partija, a u 30 godina 10^{14} partija. Razabiramo očito, da se u jednoj generaciji ni izdaleka ne mogu odigrati sve moguće partije. Zamislimo stoga, da se igra već 3 milijarde godina, i da će se igrati još 27 milijardi godina. U 30 milijardi $(30 \cdot 10^9)$ godina odigralo bi se dakle 10^{23} partija. Daleko smo, još užasno daleko, od broja 10^{18900}. Pa dobro, neka ne igraju samo šahisti našeg planeta, neka se pod istim uslovima igra na, pretpostavimo, milijardu naseljenih svemirskih tijela! Ukupan broj odigranih šahovskih partija u 30 milijardi godina na milijardu milijardi šahovskih ploča iznosi prema tome tek 10^{32}! (Zamislite — za broj 100 kvintilijuna moramo kazati: »tek«!) Odustajemo od daljnjeg računanja, jer razabiramo da nam ne će pomoći ni očajničke pretpostavke, da će se broj stanovnika Zemlje mnogostruko povećati, a broj partija odigranih u jednom danu pomoću elektronskih mozgova ako hoćete i trilijun puta umnožiti! Broj svih mogućih šahovskih partija je teoretski konačan (zbog onog remis-pravila o 50 poteza), no praktički beskonačan! (Dakako, da to ne znači da već nisu odigrane dvije identične partije!)

Broj knjiga, koje su ikad napisane, koje će ikad biti napisane i koje ikad mogu biti napisane, jest $10^{2\,000\,000}$. Dosad istraženi svemir daleko je premalen, da bi mogao biti spremište za sve te knjige. (Vidi M. f. list, god. II, br. 4—5, str. 125).

I tako dalje... u beskonačnost...

Zadaci

1. Računsku priču o zajedničkom logorovanju svih Jugoslavena protegni, uz iste stambene uslove, na logorovanje čitavog čovječanstva (2 i po milijarde ljudi). Kolika bi bila površina logora?

[Kao NR Makedonija!]

2. Kad bi u logoru iz 1. zadatka postojalo skladište sa trilijun cigareta, a milijarda ljudi pušila po 50 cigareta svakog dana, koliko bi vremena trebalo da se popuše sve cigarete? Da li bi svakom pušaču dostajalo za čitav život?

3. Koliko je puta otkucalo srce 60-godišnjaka?

4. U 1 mm^3 zdrave ljudske krvi ima oko 5 milijuna crvenih krvnih tjelešaca. Odrastao čovjek ima oko 5 litara krvi. Koliko u čovjeku ima tih tjelešaca? Promjer jednog tjelešca je 0,007 mm. Kad bismo sva tjelešca jednog čovjeka nanizali jedno do drugog u obliku tanke, duge ogrlice, da li bi ogrlica bila dovoljno duga, pa da opaše Zemlju?

[Opasuje preko 4 puta]

5. Dokaži, da bi vijenac od 3 bilijuna jabuka (prosječnog promjera 5 cm) nanizanih jedna do druge, dopirao od Zemlje do Sunca.

6. Neki računaju, da su troškovi drugog svjetskog rata iznosili 810 milijardi dolara. Ako izgradnju jedne solidno opremljene škole računamo u prosjeku sa 500 000 dolara ,koliko se škola moglo izgraditi na svijetu u svakom danu tog rata?

7. Promjer Sunca (1 391 100 km) odnosi se prema morskoj milji (1852 m) približno kao morska milja prema dužini od $2\frac{1}{2}$ mm. Provjeri!

8. U svakoj sekundi pretvara se u energiju 4 milijuna tona Sunčeve mase. Uz pretpostavku, da se proces jednoliko nastavi, koliko će Sunce još »živjeti«?

9. Ako bi nit paučine oko Zemlje imala masu od $\frac{1}{2}$ *kg*, kolika bi bila masa paučinske niti od Zemlje do a) Mjeseca, b) Sunca, c) najbliže zvijezde stajačice (udaljene 4,27 god. svjetlosti)?

[a) oko $4\frac{1}{3}$ *kg*, b) blizu 2 *t*, c) oko 500 000 *t* = masa željezne kocke brida oko 40 *m*.].

10. Jedna od najbližih spiralnih maglica, ona u Andromedi, udaljena je od nas oko 900 000 godina svjetlosti. Izrazi tu udaljenost u kilometrima, i to u obliku potencije broja 10. Kolika bi bila masa niti paučine (vidi zadatak 9.) od Zemlje do te maglice?

Radioaktivitet oborina

BOŽENA VOLARIĆ, Zagreb

Nedugo iza otkrića radioaktivnih pojava i spontanog raspadanja radioaktivnih elemenata otkrio je engleski učenjak C. T. R. Wilson i kod oborina radioktivna svojstva. Kasnije su mnogi istraživači proučavali tu pojavu i potvrdili Wilsonov nalaz, da kapljice kiše, pahuljice snijega i druge vrste oborina sadržavaju radioaktivne supstancije. Nameće se pitanje, kako i na koji način postaju oborine radioaktivne. Radioaktivni elementi su vrlo rasprostranjeni. Nalazimo ih gotovo posvuda u zemljinoj kori, no u vrlo malenim količinama. Međutim te su količine promjenljive, a ovise o sastavu tla i vrsti kamenja. U eruptivnom kamenju nalazi se znatno više radioaktivnih elemenata, nego li u sedimentnom. Morska voda također sadrži radija i ostalih radioaktivnih elemenata, ali količina je otprilike hiljadu puta manja nego u krutom tlu. Uslijed radioaktivnog raspadanja ovih sastojaka tla u atmosferu dospijevaju samo njihovi plinoviti međuprodukti raspadanja, koji se nazivaju emanacije. Zbog toga u atmosferi nalazimo radijevu emanaciju ili radon, torijevu emanaciju ili toron i aktinijevu emanaciju ili aktinon. Radona ima u atmosferi 6×10^{-18} %. Količina radona opada s udaljenošću od površine Zemlje. Ove plinovite radioaktivne elemente raznose vertikalne struje zraka u više slojeve atmosfere. Daljnjim neprekidnim raspadanjem emanacija stvaraju se kruti radioaktivni produkti iz sva tri niza, koji lebde u zraku. Kapljice kiše, pahuljice snijega, zrna tuče i ostali hidrometeori padajući kroz atmosferu nailaze na čvrste produkte raspadanja i povuku ih sa sobom. Oborine na taj način postaju radioaktivne. Radioaktivitet oborina može potjecati i od toga, što radioaktivne čestice služe kao kondenzacione jezgre. U laboratorijima je ovo eksperimentalno potvrđeno. Utvrđen je također radioaktivitet kod rose i inja. Prema mjerenjima snijeg je uvijek mnogo jače radioaktivan nego kiša. Tumači se to time, što snijeg nastaje u većim visinama, te prevaljujući dulji put kroz atmosferu nailazi na veći broj radioaktivnih atoma. Zatim sniježne pahulje imaju veću površinu i mogu povući veću količinu radioaktivnih čestica. Na početku padanja oborine radioaktivni efekt je najjači, jer u tom času lebdi najviše radioktivnih čestica u atmosferi. Kasnije ih kiša ili snijeg »isperu« iz zraka i radi toga aktivitet opada s trajanjem oborine. Ako kiša nakon izvjesnog prekida opet započne padati, radioaktivitet oborine će ponovno porasti. Istraživanja o radioaktivitetu oborina vršena su na otocima i u područjima koja su udaljena od kopna. Rezultati pokazuju da su oborine na otocima, a osobito na oceanima gotovo bez radioaktivnih svojstava t. j. skoro potpuno neaktivne. To je lako razumljivo, ako se sjetimo da je koncentracija radioaktivnih sastavnih dijelova u morskoj vodi znatno manja nego u krutom tlu. Prema

tome količina emanacije i njihovih potomaka bit će manja u zraku nad oceanima, nego nad kopnom.

Svaki radioaktivni elemenat karakteriziran je brzinom raspadanja. Broj atoma, koji se raspadne u određenom vremenu proporcionalan je ukupnom broju atoma. Za radioaktivno raspadanje jedna od karakterističnih veličina je poluvrijeme raspadanja. To je vrijeme u kojem se broj atoma radioaktivnih elementa smanji na polovicu. Brzina raspadanja nekih radioaktivnih supstancija je izvanredno velika, kod drugih naprotiv vrlo je malena. Tako poluvrijeme raspadanja za torij (Th) iznosi 13,9 milijarda godina ,dok za ThC' svega 3×10^{-7} sekunda. Radioaktivitet kiše i svježe palog snijega sasvim iščezava već za nekoliko sati odnosno aktivitet kod oborina smanji se na polovicu za otprilike pola sata. Ovi podaci ukazuju na to, da radioaktivitet oborina uglavnom potječe od krutih potomaka radijeve emanacije, kao što su RaA, RaB, RaC i t. d. Poluvrijeme raspadanja radona iznosi 3,8 dana. Toron ima kratko trajanje života. Njegovo poluvrijeme raspadanja iznosi 54,5 sekunda. Aktinon živi još manje s poluvremenom raspadanja od 3,9 sekunda. Uslijed toga toron i aktinon nalaze se samo u prizemnim slojevima atmosfere. Vertikalne struje zraka ih ne dospiju prenijeti u veće visine, pa kod radioaktiviteta oborina ne igraju znatniju ulogu. Njihovi potomci također imaju kratkotrajan život. Jedino Th B nešto dulje živi. Poluvrijeme raspadanja iznosi kod njega 10,6 sati, pa ga uzlazne zračne struje mogu ponijeti u više slojeve atmosfere. Zaista, mjerenja vršena u Austriji pokazuju aktivitet kod oborina, koji potječe od Th B. Već je spomenuto, da svježi snijeg, isto kao kiša i ostali hidrometeori gube svoja radioaktivna svojstva već za nekoliko sati. To ukazuje, da oni sadržavaju samo produkte raspadanja emanacije, a ne samu emanaciju. Naprotiv kod snijega, koji dulje leži na tlu aktivitet raste s vremenom. U tu svrhu ispitivao se snijeg, koji je ležao dulje vremena na krovovima zgrada. Međutim takav snijeg ponašao se potpuno jednako kao kiša ili svježe pali snijeg. Znači, samo onda, kada se snijeg nalazi u neposrednom dodiru sa zemljom postaje s vremenom sve jače radioaktivan. Razlog je tome,što iz kapilara tla povremeno prodire emanacija, pa »stari« snijeg može također sadržavati i emanaciju, a ne samo njene produkte raspadanja. Uzorak napravljen od »staroga« snijega sporo gubi aktivitet, a to je karakteristično za radijevu emanaciju.

Možda će nekoga zanimati kako se određuje radioaktivnost oborina. Upotrebljavaju se uglavnom dvije metode i to: metoda isparavanja i metoda filtriranja. Prvom metodom se izvjesna količina sakupljene kišnice ili otopljenog snijega naglo ispari i tako dobiveni uzorak dalje ispituje. Metoda filtriranja je vrlo jednostavna. Kišnica se lijeva u stakleni lijevak u kojem se nalazi sloj gusto zbijene vate. Većina radioaktivnih čestica sadržanih u kišnici zaostaje na vati, koja se zatim posuši, a nakon toga se istražuje njen radioaktivni sadržaj. Broj radioaktivnih čestica, koje prođu i ne zaustave se na vati prilično je malen i može se zanemariti. Istraživači, ako žele točnije podatke, služe se još metodom koncentracije, koja se primjenjuje kod dobivanja radija iz uranova smolinca i drugih uranovih rudača. Kada se u otopini nalazi radioaktivni elemenat u vrlo malenim količinama, a to je slučaj s kišnicom, otopini se doda barijev klorid (Ba Cl) i sumporna kiselina (H_2SO_4). Radioaktivni elemenat istaloži se u obliku teško topivog sulfata unatoč ogromnog razrijeđenja, jer se sulfat radioaktivnog elementa ugrađuje u rešetku barijeva sulfata. Filtriranjem zaustavi se sulfat na filter papiru, koji se zatim posuši. Filter papir, također i vata mogu se spaliti, pa određivati aktivitet iz pepela. Uzorak oborine dobiven na jedan od spomenutih načina ispituje se Geiger-Müllerovim brojačem [1]) ili ionizacionom komorom. U početnoj fazi ovih istraživanja

[1] Vidi Mat. fiz. list god. VI. br. 3.

koristila se ionizaciona komora, a danas uglavnom brojač. Uzorak oborine se unese u ionizacionu komoru i prema pomaku listića elektroskopa određuje se intenzitet radioaktivnog zračenja uzorka. Geiger-Müllerovim brojačem mjeri se radioaktivnost oborina tako, da se uzorak oborine postavi u blizinu prozorčića od tinjca na brojaču. Udaljenost između uzorka oborine i prozorčića mora biti konstantna kod svakog mjerenja. Prema propisima, koji vladaju u japanskoj meteorološkoj službi ta udaljenost iznosi 1 cm. Brojenjem udaraca u brojaču mjerimo direktno prolaz brzih električnih čestica i γ zraka, koje emitiraju radioaktivni elementi iz uzorka oborine. Kod određivanja radioaktiviteta oborine brojačem ili ionizacionom komorom nastaje pitanje, kako se može eliminirati utjecaj kozmičkih zraka odnosno njihov utjecaj svesti na minimum. U tu svrhu aparat se postavi u olovnu kućicu s prilično debelim zidovima, tako da se uglavnom spriječi dopiranje kozmičkih zraka do aparata.

Do sada smo govorili o prirodnom radioaktivitetu oborina i o procesima, koji uvjetu njegov postanak. Međutim kod atomskih eksplozija nastaje velika količina radioaktivnih jezgara. Ionizacija atmosfere naglo poraste ne samo u blizini izvršenog pokusa, već i u vrlo udaljenim krajevima, jer eksplozijom radioaktivne čestice dospiju u velike visine, a zračne struje ih ponesu daleko od mjesta njihova postanka. Uslijed porasta ionizacije zraka nastaje i jako obogaćenje radioaktivnih produkata u oborini. Ovako nastali radioaktivitet oborina naziva se umjetna radioaktivnost oborina. Kod toga se mora najprije poznavati prirodni radioaktivitet. Način mjerenja je uglavnom isti u oba slučaja. Kod mjerenja umjetnog radioaktiviteta treba samo dulje vremena pratiti jakost aktiviteta uzorka oborine. Prirodni radioaktivitet, kako je već ranije spomenuto, iščezava već za nekoliko sati, a preostali aktivitet, ukoliko postoji, praktički potječe samo od produkata atomskih eksplozija.

U našoj domovini još dosada nisu vršena sistematska mjerenja radioaktiviteta oborine, ali u toku Međunarodne geofizičke godine (1. VII. 1957. — 31. XII. 1958.) predviđena su istraživanja iz toga područja.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Stogodišnjica smrti Augustin-Louis Cauchy-a

Augustin-Louis Cauchy bio je sigurno najveći francuski matematičar 19. stoljeća, a njegova su djela vršila ogromni utjecaj na razvoj matematike u cijelom svijetu. Rodio se u Parizu 21. VIII. 1789., a umro je u Sceaux-u kraj Pariza 23. V. 1857. »Pogledajte tog mladića«, reče jednom Laplace nekom svom prijatelju, kad ga je vidio, kako uči u radnoj sobi svog oca, »taj će nadmašiti danas sutra nas sve«. I doista su te riječi bile proročanske.

U 13. godini pošao je Cauchy u »École centrale du Panthéon«, u kojoj je učio isključivo književnost, te je već u 15. godini svršio odlično svoje književne nauke i stekao nagradu »Grand prix d'Humanités« osnovanu od samog Napoleona. Slijedeće je godine, poslije 10 mjeseci priprave, primljen u glasovitu Politehničku školu, gdje se brzo odlikovao ingenioznim rješenjem problema konstrukcije kruga, koji dira 3 zadana kruga.* Završivši 1807. tu školu kao prvi upiše se u »Školu za mostove i ceste«, gdje je nastavljao niz svojih uspjeha. G.1808. upravljao je kao odličan inženjer konstrukcijama kanala na rijeci l'Ourcq, a 1810. izgrađivao je luku u Cherbourgu.

Međutim ljubav prema matematici,

* Taj se problem zove *Apolonijev problem*, prema grčkom matematičaru Apoloniju, koji je živio krajem 3. stoljeća pr. n. e. Apolonijevo rješenje nije stiglo do nas. Problemom su se bavili mnogi veliki matematičari; on ima u općenitom slučaju 8 realnih rješenja.

težnja za naučnim radom a također i slabije zdravstveno stanje bili su uzrokom, da je napustio inženjerski poziv i da se sav posvetio matematičkim naukama. Nije mu bilo ni 24 godine, kad su se njegovom znanju divili svi matematičari njegova doba.

Cauchy-eva istraživanja pripadaju u glavnom višoj matematici i teoretskoj fizici. Iz tog područja napisao je on preko 750 raznih rasprava — samo od 1839. do 1857. bilo ih je preko 500. U to je doba gotovo svaki tjedan pročitao u pariskoj Akademiji nauka jednu novu raspravu tako, da je tih rasprava bilo gotovo 20 puta više negoli rasprava svih njegovih drugova kroz isto vrijeme. Akademija je jedva nasmagala sredstva, da se te silne rasprave štampaju.

Cauchy je postavio diferencijalni i integralni račun na solidne temelje odrekavši se geometrijskih predodžbi, kojima su se služili njegovi predšasnici. Polazna mu je točka bila *pojam granice*, jasno preciziran. Na tom se pojmu osnivaju definicije, klasične počevši od njegovog doba, za neprekidnost funkcija, za određeni integral, konvergenciju redova i t. d. On je bio prvi, koji je strogo dokazao glasoviti Taylorov poučak pronašavši važnu formulu za ostatak. Njegova štampana djela »Cours d'Analyse de l'École polytechnique« (1821.) i »Résumé des leçons données sur le Calcul infinitésimal« (1823.) su uzori, koji su inspirirali njegove nasljednike. Sa svojom teorijom funkcija kompleksne promjenljive veličine otvorio je on područje studija, koje još ni danas nije završeno. To područje čini ogromni doprinos, što ga je 19. vijek dao matematici. Danas je ta teorija neophodno potrebna u raznim primjenama matematike pa i u aeronautici. U njegovim raspravama rješavala su se razna pitanja iz teorije brojeva, teoretske mehanike, nebeske mehanike i matematičke fizike. Počevši od 1826. do 1830. izdavao je i svoj vlastiti časopis »Exercices Mathématiques«, gdje se dokumentirao kao silno snažan i prodoran duh.

Cauchy se nije nikako zagradio samo u jedan kut matematičkih nauka. Svagdje je on stvarao, svagdje je on usavršavao, svagdje je bio prvi. Rješavao je probleme, koji su se opirali naporima velikih matematičara kao Eulera i Gaussa.

Glasoviti norveški matematičar Abel (1802.—1829.) kazuje nam, da je on crpio sve svoje znanje iz Cauchy-evih rasprava.

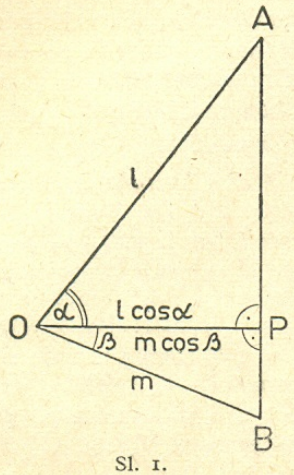
Akademija nauka u Parizu izdala je sva Cauchy-eva djela u 27 svezaka velikog formata, svaki blizu 500 stranica, u 2 serije: prva serija od 12 svezaka obuhvaća djela izašla u spisima Akademije, dok su ostala djela izašla u 15 svezaka druge serije.

Cauchy je u saobraćaju bio ljubezan i drag, lako mu se moglo pristupiti; ipak onaj, koji ga je posjetio, teško je mogao doći do riječi. Cauchy je odmah uzeo pero u ruke, da rješava probleme, koji su mu bili zadani ili je opet izlagao svoje teorije. Slušati nekoga bila je za Cauchy-a nemoguća stvar. Njegov je mozak razvijao obilje misli, pa je nastojao ,da ih što prije izrazi. Uvijek je činio ono, što je mislio da mu je dužnost ne obazirući se na svoje vlastite interese. Malo se brinuo za svoje materijalno blagostanje, a davao je, kad je imao, i u dobrotvorne svrhe.

Cauchy je dao dosta doprinosa i elementarnoj matematici. Pisao je o tom, kako će se izbjeći griješke u numeričkim računima, kako će se provjeriti i pojednostavniti razne operacije decimalne aritmetike, proširio je Eulerov poučak o poliedrima na zvjezdolike poliedre, pojednostavnio je Euklidov dokaz o okomitosti pravca na ravninu, pokazao je, kako će se odrediti broj korijena neke jednadžbe, koji se nalaze između 2 zadana broja, pronašao je više nejednakosti, pisao je o algebarskom rješavanju binomnih i trinomnih jednadžbi, o raznim pitanjima iz trigonometrije, obogatio je teoriju determinanata, riješio je Apolonijev problem i t. d.

Donosimo ovdje 2 Cauchy-eva dokaza adicionog teorema za funkcije sinus i kosinus.

1. Neka su zadana 2 šiljasta kuta α i β (sl. 1.). Stavimo ih tako jedan do drugoga, da im bude jedan krak zajednički, pa povucimo bilo koju okomicu AB na taj zajednički krak OP. Imamo $OP = l \cos\alpha = m \cos\beta$. Iz očite relacije



Sl. 1.

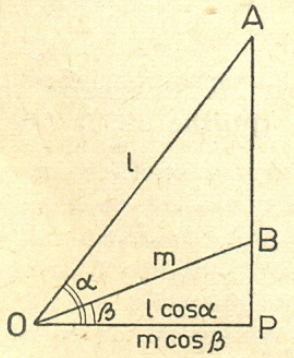
$$\triangle OAB = \triangle OAP + \triangle OBP \quad \text{izlazi}$$

$$\frac{1}{2} lm \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} lm \cos\beta \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} lm \cos\alpha \sin\beta \text{ ili ako skratimo s } \frac{1}{2} lm,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad (1).$$

Potražimo sad obrazac za $\sin(\alpha - \beta)$.



Sl. 2.

Iz sl. 2. razabiramo

$$\triangle OAB = \triangle AOP - \triangle OBP \quad \text{ili}$$

$$\frac{1}{2} lm \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} lm \cos\beta \sin\alpha -$$

$$- \frac{1}{2} lm \cos\alpha \sin\beta \quad \text{ili}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad (2).$$

Formule (1) i (2) izvedene su za slučaj, da su α i β sadržani između 0 i $\frac{\pi}{2}$, formula (2) traži osim toga, da je $\alpha > \beta$. Upirući se na formulu (2) lako se dokazuje, da formula (1) vrijedi 1) ako je α ili β sadržano između $\frac{\pi}{2}$ i π, 2) ako su α i β sadržani između $\frac{\pi}{2}$ i π, 3) ako α i β poprimaju koje mu drago vrijednosti.

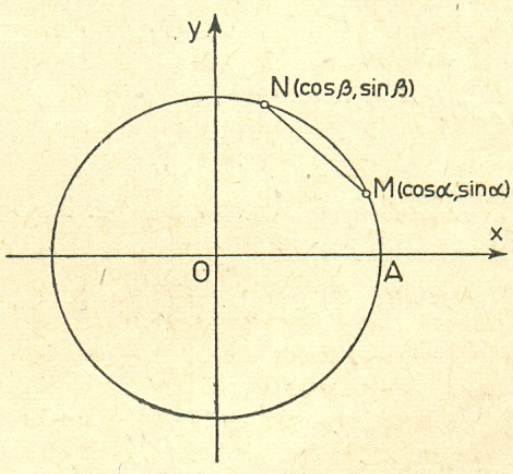
Onda formula (1) vrijedi općenito: također vrijedi i općenito formula (2), koja se iz nje izvodi zamjenom od β $s - \beta$. Dalje se dobiva:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] =$$

$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \text{ i dalje}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

2. Nacrtajmo trigonometrijski krug i razmatrajmo bilo koja 2 luka $\alpha = AM$ i $\beta = AN$. Koordinate točke M jesu $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, a točke N, $\cos\beta$, $\sin\beta$. Udaljenost točaka M i N jest po formuli za udaljenost 2 točaka



$$\overline{MN}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta).$$

Dajmo brojevima α i β 2 vrijednosti, za koje $\beta - \alpha$ ostaje nepromijenjeno.

$\alpha = a$, $\beta = b$, onda je

$$\overline{MN}^2 = 2(1 - \cos a \cos b - \sin a \sin b)$$

$\alpha = 0$, $\beta = b - a$,

$$\overline{MN}^2 = 2[1 - \cos(b - a)].$$

Dakle je $\cos(b - a) = \cos b \cos a + \sin b \sin a$. Ta relacija vrijedi za bilo koje b i a; iz te se formule lako izvode i ostale.

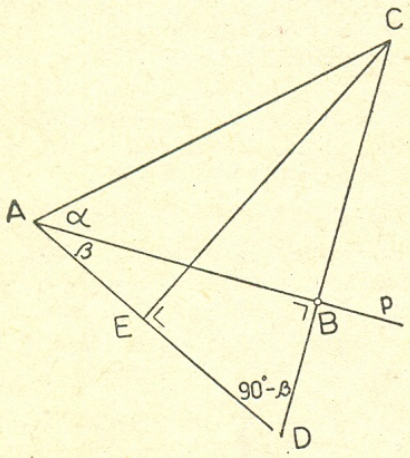
S. Š.

Još jedan dokaz adicione teoreme za funkciju sinus

Treba dokazati da je

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Uzećemo proizvoljnu dužinu AB (v. sl.) pa s jedne njene strane preneti ugao α a s druge β, uzevši A za teme. Prava povučena u tački B upravno na AB seče krake uglova u C i D. U tački C postavimo visinu CE trougla ACD.



Iz $\triangle ACE$ imamo da je

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{CE}{AC}$$

što na osnovu veze $CE=CD\sin(90°-\beta)$ iz trougla CDE postaje

$$\sin(\alpha+\beta)=\left(\frac{BC}{AC}+\frac{BD}{AC}\right)\cos\beta.$$

Kako je

$$\frac{BC}{AC}=\sin\alpha,\quad \frac{BD}{AC}=\frac{BD}{AB}\cdot\frac{AB}{AC}=\operatorname{tg}\beta\cos\alpha$$

to poslednja jednakost uzima oblik

$$\sin(\alpha+\beta)=(\sin\alpha+\operatorname{tg}\beta\cos\alpha)\cos\beta$$

ili

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

što je trebalo i pokazati.

Prikazana geometriska interpretacija adicione teoreme za sinus zbira ima smisla samo ako su uglovi α i β veći od 0 a manji od $\frac{\pi}{2}$ radijana.

Sličnim postupkom izvodi se adiciona teorema za tupe, pa i ostale uglove.

D. T.

Obrati posveopćenog Pitagorina poučka

Neka su a, b, i c mjerni brojevi triju dužina, neka su pozitivni, i neka je $a\leqq b<c$!

a) Ako je $a^2+b^2=c^2$, onda postoji trokut, komu su a, b i c stranice, koji je pravokutan, i komu je c hipotenuza.

Dokaz: Trokut postoji, jer je $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab>c^2$, t. j. $a+b>c$. Trokut sa stranicama a, b i c je pravokutan, a hipotenuza mu je c, jer je po IV. poučku o sukladnosti trokuta sukladan s pravokutnim trokutom, komu su katete a i b, a hipotenuza $c_1=\sqrt{a^2+b^2}=c$.

b) Ako je $a^2+b^2>c^2$, onda postoji trokut sa stranicama a, b i c, i on je šiljastokutan. Trokut postoji, jer je kao pod *a)* $a+b>c$. Neka je c_1 hipotenuza pravokutnog trokuta, komu su katete a i b! Onda je $c_1^2=a^2+b^2>c^2$, t. j. $c_1>c$. Po poučku o trokutima, koji se podudaraju u dvije stranice, kut nasuprot stranici c je manji od pravoga. Budući da je c najveća stranica po pretpostavci, i druga dva kuta su šiljasta.

c) Ako je $a^2+b^2<c^2$, trokut sa stranicama a, b i c postoji samo onda, ako je $a+b>c$, i tupokutan je. Ako je c_1 hipotenuza pravokutnog trokuta s katetama a i b, onda je $c_1^2=a^2+b^2<c^2$, t. j. $c_1<c$. Kao pod *b)* izlazi onda, da je konkavni kut nasuprot stranici c veći od pravoga, i prema tome je trokut (a, b, c) tupokutan.

d) U slučajevima $a=b>c$, $a=b=c$ trokut (a, b, c) postoji i šiljastokutan je.

S. Šk-a

Na pragu Međunarodne geofizičke godine 1957—58

Još samo kratko vrijeme razdvaja nas od početka velikog naučnog pothvata, koji nosi ime Međunarodna geofizička godina. Ona počinje 1. srpnja 1957. i trajat će 18 mjeseci t. j. do 31. prosinca 1958. Dogovoreno je, da će učenjaci cijeloga svijeta sa područja geofizike, meteorologije, geodezije, astronomije, radio-tehnike i kozmičke fizike kroz to vrijeme s najmodernijim tehničkim pomagalima vršiti sistematska ispitivanja geofizičkih pojava. U tom razdoblju ne će se vršiti istraživanja samo na već postojećim opservatorijima i institutima,

nego će se organizirati motrenja i na dosad nenastanjenim dijelovima Zemlje, kao što su polarni, pustinjski i oceanski predjeli. U tu svrhu odaslane su već brojne ekspedicije raznih naroda. Najveći pohod učinjen je na Antarktik. Pokušava se što jednoličnije rasporediti stanice kako u umjerenim, tako i u polarnim i ekvatorijalnim širinama. Pored toga opasat će se stanicama tri zemljina meridijana i to: $80^0\,W$ (Sjev. i Južna Amerika), $10^0\,E$ (Evropa i Afrika) i $140^0 E$ (Ist. Azija i Australija). Na tim stanicama vršit će se istovremena motrenja Zemljinog magnetskog i električnog polja, pojava polarne svjetlosti, prizemna meteorološka motrenja, motrenje viših slojeva atmosfere pomoću balona, aviona i raketa do 200 km visine, Sunčevo zračenje i aktivnost, te određivanje geografske dužine i širine. Najdragocjenije podatke očekuje čovječanstvo od umjetnih satelita, koji će se za vrijeme Geofizičke godine izbaciti na visinu od oko 400 *km*. Predviđa se, da će imati sferni oblik, presjeka oko 60 *cm* i masu od oko 50 *kg*. Imat će brzinu oko 8 kms^{-1} i kretat će se oko Zemlje u smjeru od jednog pola prema drugom. Jedan obilazak oko Zemlje izvršit će za 90 min. U sebi će imati ugrađene razne aparature, koje će nam donijeti dragocjee podatke iz te velike visine.

I u našoj se državi pripremaju geofizičari, meteorolozi, astronomi i geodeti, da u granicama naših mogućnosti izvrše opsežna mjerenja kako u unutrašnjosti, tako i na moru. Posebna pažnja posvetit će se visokim slojevima atmosfere.

Za Geofizičku godinu izabrano je ovih 18 mjeseci radi toga, što se u tom vremenu očekuje velika Sunčeva aktivnost, pa se želi vidjeti, kako će se ona odraziti na našem planetu. Pored toga sad se upravo navršava 75 godina od prvog sličnog pothvata, koji je nosio ime »Prva međunarodna polarna godina« (1882—1883) i 25 godina od drugog organiziranog istraživanja t. zv. »Druge međunarodne polarne godine« (1932—1933). Za razliku od ove Geofizičke godine, tada su se isključivo istraživali samo polarni predjeli. Zbog toga su te godine nazvane »Polarnim«, a ova, u kojoj se istraživanja proširuju na cijelu Zemlju, dobila je ime, »Geofizička« godina.

I. P.

Polarna svjetlost 21. I. 1957.

Dne 21. siječnja o. g. opažena je u srednjoj i južnoj Evropi polarna svjetlost koja se inače u tim krajevima vrlo rijetko javlja. Podaci, koje je sakupio Hidrometeorološki zavod u Zagrebu pokazuju, da se kod nas ova pojava dobro vidjela na Jadranu, u jugozapadnoj Hrvatskoj i na planinama, gdje je nebo bilo vedro i zrak bistar, dok je u nekim dijelovima unutrašnjosti nije bilo moguće vidjeti zbog jake magle i niskih oblaka. Svijetlo se javljalo na sjevernom dijelu neba tokom noći od 21. na 22. između 19 i $3^1/_2$ sati u nekoliko navrata. Čini se, da je pojava započela kao tamno crveni oblak, uzdignut nešto iznad horizonta. Zatim je poprimila oblik prozirne crvene zavjese sa svijetlijim i tamnijim uzdužnim prugama, koja se protezala u visinu do iznad zvijezde Sjevernjače. Zavjesa se pomicala i titrala, njen najsvjetliji dio nije bio uvijek na istom mjestu nebeskog svoda, a osim nekoliko tonova crvene boje pri rubovima se vidjela i narančasta, bjelkasta i plavkasta svjetlost. More, a također i snijeg, gdje ga je bilo na tlu, poprimili su crveni odsjev. U Hrvatskom Primorju i Dalmatinskoj Zagori mislili su ljudi ispočetka, da su se zapalile šume s onu stranu planina, dok se nekima činilo, kao da je nebo obasjano jakim reflektorima. Svi se očevici slažu, da je pojava bila upravo veličanstvena nakon izlaza Mjeseca. Svjetlo je bilo najjače oko 23 sata i još jednom iza pola noći, kada se činilo, kao da će svanuti zora, a poslije 3 sata je konačno izblijedilo i nestalo.

Premda se u nastavi fizike tumači postanak polarnog svjetla, podsjetit ćemo se i ovom zgodom na to.

Matematička proračunavanja Störmera, fizikalni pokusi Birkelanda kao i dugogodišje iskustvo, pokazali su, da polarnu svjetlost uzrokuju električki nabijene čestice, koje kao električna struja sa Sunca dolaze u Zemljinu atmosferu. Zemaljsko magnetsko polje otklanja te t. zv. heliokatodne zrake iz njihovog prvobitnog pravocrtnog puta i određuje im novi smjer gibanja. Jedan dio čestica zadržava se u ekvatorijalnoj ravnini, gdje kruži oko Zemlje u izvjesnoj udaljenosti. Drugi dio čestica priklanja se magnetskim polovima i u njihovoj blizini prodire dublje u Zemljinu atmosferu, dok ih ona ne apsorbira, najčešće na visini oko 100 *km*. Za vrijeme svog puta kroz atmosferu heliokatodne zrake ioniziraju taj plinoviti Zemljin ovoj, t. j. učine ga električki vodljivim, i pobude u njem polarnu svjetlost. (Na isti način nastaje svjetlost prilikom električnih pražnjenja u vakuum cijevima kao što su na pr. Geisslerove ili neonske cijevi). Svoje ime dobila je polarna svjetlost zato, što je ona redovna pojava u blizini magnetskih, a to znači ujedno i blizu geografskih polova Zemlje.

No od vremena do vremena aktivnost Sunca se povećava. Velike erupcije na njegovoj površini izbacuju osobito mnogo električki nabijenih čestica, tako da se jače razvije i kolut, što ga te čestice čine oko Zemljinog ekvatora. Pojačano magnetsko polje tog koluta otklanja heliokatodne zrake, koje su upravljene prema polovima i privlači ih bliže ekvatoru. Tada dolazi do pojave polarne svjetlosti i u nižim geografskim širinama, kao što se to dogodilo i 21. siječnja o. g. Kako je ta pojava rijetka pokazuje nam i to, što je ona u našim krajevima u posljednjih 86 godina zabilježne svega 9 puta.* *B. P.*

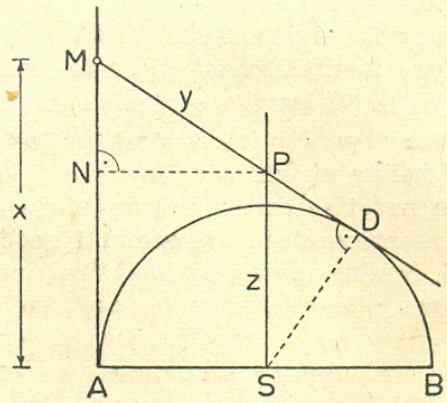
* 26. I. 1949. bila je viđena polarna svjetlost u zapadnim dijelovima naše države, a 28. X. 1951. samo u Istri.

Gdje je pogreška?

Učenik Mirko trebao je riješiti ovaj zadatak:

Zadana je čvrsta polukružnica promjera $\overline{AB} = 2r$. *U točki A povučena je polutangenta, na kojoj se nalazi povoljna točka M. Iz točke M povučena je i druga tangenta MD na polukružnicu. Sjecište te druge tangente s okomicom u središtu S označimo s P (vidi sliku). Nastale dužine* $\overline{AM}$, $\overline{MP}$, $\overline{SP}$ *neka imaju mjerne brojeve* x, y, z. *Treba y i z izraziti kao funkcije od x i istražiti, kako se mijenjaju te veličine, ako x raste od 0 do* ∞, *t. j. ako se točka M odmiče od točke A u beskonačnost.*

Mirko je počeo rješavati. Razabrao je da je $\overline{MD} = x$, dakle $\overline{PD} = |x - y|$. (Mora se uzeti apsolutna vrijednost zbog slučaja $x < r$!) Zatim je iz točke P spustio okomicu na AM i dobio točku N. Razabrao je da je $\overline{MN} = |x - z|$. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute SDP i MNP dobio je



$$(1) \qquad z^2 = (x - y)^2 + r^2$$

$$(2) \qquad y^2 = (x - z)^2 + r^2.$$

Pomislio je, da će možda do cilja doći eliminiranjem polumjera r, pa je oduzeo relaciju (2) od (1):

$$z^2 - y^2 = (x - y)^2 - (x - z)^2.$$

Upotrebivši pravilo o razlici kvadrata Mirko je dalje došao do

$$(3) \qquad (z - y)\,(z + y) = (z - y) \cdot (2x - y - z).$$

Obje strane u relaciji (3) podijelio je zajedničkim faktorom $z - y$ i dobio redom

$$z + y = 2x - y - z$$
$$2z = 2x - 2y$$
$$z = x - y$$

Prema tome može se u relaciji (1) na desnoj strani umjesto $x - y$ pisati z. Mirko je to i učinio i izašlo mu je:

$$z^2 = z^2 + r^2,$$

dakle $r = 0$!!

Mirko sad razmišlja, gdje je pogriješio, jer mu je ipak teško vjerovati, da svi krugovi na svijetu imaju polumjer nula! Pomozite mu! *M. K.*

NOVE KNJIGE

Varićak-Vernić:

Vježbe iz fizike za srednje škole

Naklada »Školska knjiga«, Zagreb 1957 (148 stranica, cijena 240 Dinara)

Nedavno je izašla iz štampe knjiga Varićak-Vernić: Vježbe iz fizike za srednje škole. To je veoma korisna i zanimljiva knjiga za sve one, koji se interesiraju za fiziku i žele, da svoje znanje praktički provjere i prošire. No ta knjiga bit će i vrlo dobar priručnik kod đačkih vježba iz fizike, koje su danas sastavni dio nastave fizike. Učiti fiziku samo iz udžbenika i pasivno gledajući pokuse, koje nastavnik izvodi na satu fizike, samo je polovično učenje. Kad sami eksperimentalno provjeravamo pojedine fizičke zakone, kad sami izvodimo mjerenja fizičkih veličina, onda tek postane naše znanje iz fizike potpuno. Samo na taj način zakonitosti, koje vladaju u svijetu oko nas možemo, da tako kažemo, direktno očutiti. Mnogima od vas trebat će u daljnjem vašem školovanju dobro i temeljito znanje iz fizike, a to ćete sigurno postići ne samo »bubanjem« fizike, već i praktičnim radom, vršeći pažljivo vježbe iz fizike. Ova knjiga će vam tu pomoći.

Pred par godina izašlo je prvo izdanje ove knjige (1951. god.). To izdanje bilo je brzo rasprodano. Ovo drugo izdanje znatno se razlikuje od prvoga; ovo izdanje je u mnogočemu poboljšano, a uz to i znatno prošireno prema prvom izdanju. Knjiga sadrži 60 vježba iz svih područja fizike. Kod svake vježbe dan je kratak teoretski uvod, zatim detaljan tok rada i na kraju zadaci, t. j. mjerenja, koja se trebaju izvršiti. Knjiga je pisana jasnim stilom, bogato je ilustrirana shematskim slikama i fotografijama, tako, da se svaka aparatura za pojedinu vježbu može prema opisu i slikama lako sastaviti. Na kraju knjige dane su tablice, u kojima nalazimo sve važnije konstante i podatke potrebne kod izvođenja vježba (na pr. tablica, gdje su dani podaci za neke elektronke).

Uvjereni smo, da će ta knjiga biti od velike koristi svim onim učenicima, koji se zanimaju za prirodne nauke, a osobito za fiziku, pa je zato i preporučamo.

Bra-Ma

»Zemlja i svemir«. Izašao je 2. broj časopisa *»Zemlja i svemir«* s ovim sadržajem: V. Nigrović, In memoriam Dr. O. Kučere; B. Margetić, E. Halley; V. Marinović, Mars — najbliži Zemlji; O. Wittasek, Od fantazije do stvarnosti; Novosti i zanimljivosti. — Časopis ima 24 litograf. stranice. Cijena je broju 30 dinara. Naručuje se putem čeka 40-KB-6-Ž-1677 ili također Hrv. prirod. društvo, Zagreb, Ilica 16, III. kat.

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike*

253. Дат је квадрат $ABCD$ стране a, чије су дијагонале AC и BD. На странама AB и CD наносе се једнаке дужи

$$AA_1 = CC_1 = x, \quad (x < a),$$

а на BC и DA дужи

$$BB_1 = DD_1 = y, \quad (y < a).$$

а) Показати да је $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм и одредити пресек његових дијагонала.

* Zadatke označene s ** neka ne šalju učenici razreda višeg od petog, a zadatke označene s * učenici razreda višeg od šestog.

Rješenja poslati najkasnije do 15. VII. 1957.

б) Претпостављајући да је x дато, израчунати y из услова да је $A_1B_1C_1D_1$ правоугаоник. Проблем има два решења; једном решењу одговара квадрат а другом правоугаоник.

в) Израчунати површину P тог квадрата и површину P_1 правоугаоника у функцији од a и x. Показати да је $P + P_1 = a^2$.

254. Дат је правилан шестоугао стране a.

а) Над сваком страном тог шестоугла конструисан је квадрат. Показати да дванаест спољашних темена тих квадрата претстављају темена једног правилног дванаестоугла.

б) Темена тог дванаестоугла означена су редом, са $A_1, A_2, \ldots . A_{12}$, затим су правама спојена темена A_1 и A_3, A_4 и A_6, A_7 и A_9, A_{10} и A_{12}. Те праве, довољно продужене, образују квадрат. Показати да је површина тог квадрата једнака површини датог дванаестоугла.

255. Одредити све системе realnih vrijednosti od x i y, za koje je izraz $(x + iy)^3$ realan i veći od 27.

256. Stranice trokuta čine aritmetički niz sa zadanom diferencijom d; kolike su te stranice, ako je omjer površine trokuta i površine pravokutnika, što ga određuju obje manje stranice trokuta, jednak m. Diskusija.

Uputa: srednju stranicu trokuta označi sa x; mora biti $x > 2d$.

257.* Skrati:

$$\frac{(m^2 + 3mn - 4n^2)^4 - (m^2 - 3mn - 4n^2)^4}{(m^2 + 2n^2)^4 - (m^2 - 4n^2)^4 - (6n^2)^4}$$

Uputa: u nazivniku uzmi u obzir najprije prvi i treći član.

258. Odredi takav 4-znamenkasti cijeli broj potpuni kvadrat, da su mu prve 2 i posljednje 2 znamenke jednake.

259. Zadana je jednadžba

$$(m - 2)\,x^2 + 3x + (m + 2) = 0.$$

а) Kako se mijenjaju korijeni te jednadžbe, kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$?

b) Za koje se vrijednosti od m α) samo jedan, β) oba korijena nalaze između -3 i $+3$?

Zadatak neka se riješi i grafički. Uputa: vidi M. F. L. god. VII. str. 84. i 122.—125.

260. Koju jednadžbu ima elipsa $8x^2+9y^2= = 108$ u koordinatnom sustavu, što ga čine tangenta (os apscisa) i normala u točki $M(3, 2)$, i koji je tako orijentiran, da središte elipse leži u trećem kvadrantu?

261. Tangente povučene iz točke $T(x_0, y_0)$ na parabolu $y^2 = 8x$ zatvaraju pravi kut. Točka T udaljena je od fokusa F parabole za dužinu $d = 5$, a ima pozitivnu ordinatu. Utvrdi, da pravac određen diralištima onih tangenata, prolazi kroz fokus F, pa odredi duljinu tetive, koja spaja dirališta, i omjer, u kojem fokus dijeli tu tetivu!

262.* Ako su a, b, c tri različita pozitivna broja, tad je

$$ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ca\,(c + a) > 6abc.$$

Uputa: ispitaj najprije odnos između zbroja $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ i broja 2.

263.** Izračunaj

$$A = \frac{16a^2 - (b - c)^2}{(4a + c)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (c - 4a)^2}{(4a + b)^2 - c^2} + \frac{c^2 - (4a - b)^2}{(b + c)^2 - 16a^2}.$$

264.** Neka se dokaže: ako je $A = a^2 - bc$, $B = b^2 - ac$, $C = c^2 - ab$, onda je

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3\,ABC$$

jednako $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$.

265. Odredi graničnu vrijednost izraza:

$$\frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x} \quad \text{za } x \to 0.$$

B) Zadaci iz fizike

136. Koliko puta većom brzinom bi se morala okretati Zemlja, da tijela na ekvatoru ne bi imala težinu? Gravitacija na ekvatoru je 978,04 $cm\ s^{-2}$, a akceleracija centrifugalne sile na ekvatoru je 3,385 $cm\ s^{-2}$.

137. Srebrna nit duga 20 cm kod temperature 0^0 C napeta je horizontalno između dvije točke A i B. U sredini niti obješen je uteg P. Kroz tu nit puštamo električnu struju, koja ugrije nit na 150^0 C. *а*) Za koliko se spusti uteg P, ako je linearni koeficijent rastezanja za srebro $\alpha = 0{,}0000194$? b) Koliko puta je pomak utega P veći od produženja niti?

138. Električno grijalo podešeno, da ga priključimo na napon od 110 V, troši 375 W. Kako ćemo preudesiti to grijalo,

da priključivši ga na napon od 220 V, troši istu snagu?

139. Primarna uzvojnica transformatora ima 4500 navoja, a sekundarna 150 navoja. Primarna uzvojnica tog transformatora spojena je s naponom od 3000 V. Sekundarna uzvojnica je pak spojena s otpornom žicom. Ta žica ugrije 15 *l* vode za 10 minuta od 15° C do 100° C. *a)* Koliki je otpor te žice? *b)* Kako jaka struja teče primarnom uzvojnicom? (Pretpostavlja se ,da transformator nema nikakvih gubitaka.).

140. Optički sistem sastavljen je od dvije leće; jedne pozitivne i druge negativne. Žarišna daljina pozitivne leće je 20 *cm*, a negativne 4 *cm*. Ispred pozitivne leće u udaljenosti 4,2 *m* nalazi se predmet *AB* visok 3 *cm*. Predmet je postavljen okomito na optičku os i njegov kraj *A* nalazi se na optičkoj osi. *a)* Kolika mora biti udaljenost između leća, ako želimo, da se virtuelna slika *A'B'* predmeta *AB* nalazi 20 *cm* od negativne leće? b) Odredite kut pod kojim se vidi predmet *AB* iz mjesta, gdje je negativna leća, kad nema optičkog sistema! *c)* Odredite kut, pod kojim se vidi predmet *AB* iz mjesta gdje je negativna leća, kad postoji optički sistem! *d)* Koliko je povećanje tog optičkog sistema?

C) Rješenja iz matematike

240. *Kutovi* α *i* β *zadovoljavaju uvjetu* $m \sin\alpha + \sin\beta = 0$, *gdje je* m *broj po volji. Pokazati, da je u tom slučaju zadovoljen i slijedeći uvjet:*

$$(m-1)\,tg\frac{\alpha-\beta}{2} + (m+1)\,tg\frac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

Iz $m\sin\alpha + \sin\beta = 0$ izlazi

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = -m, \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = -\frac{m}{1},$$

$$\frac{\sin\beta + \sin\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha} = \frac{-m+1}{-m-1},$$

$$\frac{2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{1-m}{-(1+m)} = \frac{m-1}{m+1}$$

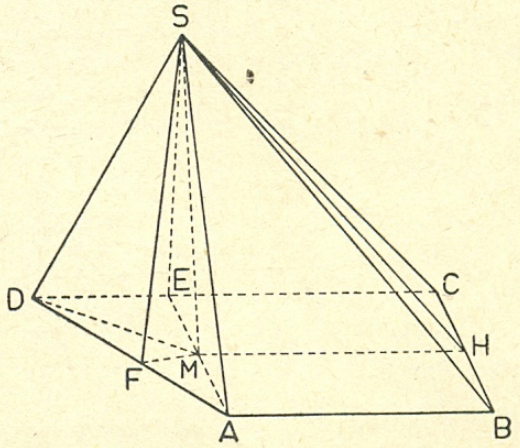
$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}\,ctg\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$(m+1)\,tg\frac{\alpha+\beta}{2} = (m-1)\,tg\frac{\beta-\alpha}{2} \quad \text{ili}$$

$$(m+1)\,tg\frac{\alpha+\beta}{2} + (m-1)\,tg\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Petričević Josip, uč. 7d r. 3. g. Zagreb

241. *Пирамида SABCD има као базу правоугли трапез ABCD са правим угловима у B и C; стране тог трапеза су* $AB = BC = 2a$ *и* $CD = 3a$; *врх пирамиде се пројектује у средини M нормале повучене из A на DC; дата је бочна ивица* $SD = 3a\sqrt{2}$.



Изразити површину и запремину пирамиде као функцију промењиве a.

Ако спојимо M и D, $(DE = EM)$ тада је из $\triangle SMD$, $\overline{SM}^2 = (3a\sqrt{2})^2 - (a\sqrt{2})^2$, $SM = 4a$. За површину су нам потребне висине бочних страна пирамиде.

Из $\triangle SMA$ је $\overline{SA}^2 = (4a)^2 + a^2$, $SA = a\sqrt{17} = SE$, из $\triangle SMH$ је $\overline{SH}^2 = (4a)^2 + (2a)^2$, $SH = 2a\sqrt{5}$.

FM претставља половину хипотенузине висине у $\triangle AED$; $\overline{DA}^2 = (2a)^2 + a^2$,

$DA = a\sqrt{5}$ па је $a\sqrt{5}\cdot h = 2a^2$,

$$h = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \text{ а } FM = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Из $\triangle SMF$ је $\overline{SF}^2 = (4a)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2$,

$$SF = \frac{9a}{\sqrt{5}} = \frac{9a\sqrt{5}}{5}.$$

Површина пирамиде је (база, па редом бочне стране)

$$P = \frac{(3a+2a)\cdot 2a}{2} + \frac{2a\cdot a\sqrt{17}}{2} +$$

$$+ \frac{3a\cdot a\sqrt{17}}{2} + \frac{2a\cdot a\sqrt{5}}{2} + \frac{a\sqrt{5}\cdot 9a}{2\sqrt{5}}$$

$$P = \frac{a^2}{2}(19 + 5\sqrt{17} + 4\sqrt{5}).$$

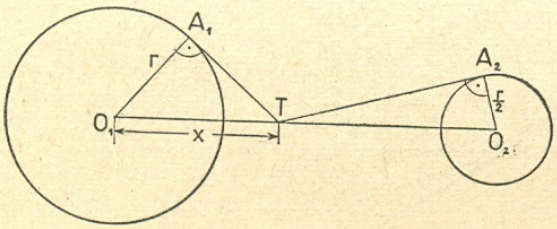
Запремина пирамиде је

$$V = \frac{(3a + 2a) \cdot 2a}{2} \cdot \frac{4a}{3}, \quad V = \frac{20a^3}{3}.$$

Мудрински Војислав
уч. 7д р. г. »Св. М.« Нови Сад

242. *Zadana su 2 kruga* (O_1, r) *i* $\left(O_2, \frac{r}{2}\right)$; udaljenost središta tih krugova je $O_1O_2 = \frac{7r}{2}$.

Neka se na O_1O_2 *i između* O_1 *i* O_2 *odredi tačka* T *takova, da, ako povučemo tangente* TA_1 *i* TA_2 *na svaki od oba kruga, da je* $\overline{TA_1}^2 + \overline{TA_2}^2 = l^2$, *gdje je* l *zadana dužina.*



Uputa: uzmi $O_1T = x$ za nepoznanicu. Zadatak je moguć, ako se x nalazi između r i $\frac{7r}{2} - \frac{r}{2} = 3r$.

Tangente povučene iz tačke T na oba kruga su okomite na poluprečnike $\overline{A_1O_1} = r$ i $\overline{A_2O_2} = \frac{r}{2}$, te mjesto TA_1 i TA_2, uzimajući u obzir da je $O_1T = x$, u zadanoj relaciji možemo staviti:

$$x^2 - r^2 + \left(\frac{7}{2}r - x\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = l^2$$

$$x^2 - r^2 + \frac{49}{4}r^2 - 7rx + x^2 - \frac{r^2}{4} - l^2 = 0$$

$$8x^2 - 28rx + 44r^2 - 4l^2 = 0$$

$$2x^2 - 7rx + 11r^2 - l^2 = 0 \qquad (1)$$

Kako prema uputi x mora biti sadržano između r i $3r$, jednačina (1) ima samo jedno rješenje, ako je

$$f(r)\,f(3r) = (6r^2 - l^2)(8r^2 - l^2) < 0.$$

$f(r)\,f(3r) < 0$ za $r\sqrt{6} < l < 2r\sqrt{2}$.

Jednačina (1) ima 2 rješenja ako ispunjava slijedeće uslove:

1) $D \geqq 0$, 2) $f(r) > 0$, 3) $f(3r) > 0$ i 4) $r < \frac{S}{2} < 3r$.

1. $D = 49r^2 - 8(11r^2 - l^2) = 8l^2 - 39r^2$;
$D \geqq 0$ za $l \geqq r\sqrt{\frac{39}{8}}$,
2. $6r^2 - l^2 > 0$ za $l < r\sqrt{6}$,
3. $8r^2 - l^2 > 0$ za $l < 2r\sqrt{2}$,
4. i 5. $r < \frac{7r}{4} < 3r$ uvijek ispunjeno.

Svi su ti uslovi ispunjeni za

$$r\sqrt{\frac{39}{8}} \leqq l < r\sqrt{6}.$$

Martinis Vinko
uč. 8a r. g. »F. Višnjić« Bijeljina

243. *U ravnokrakom trouglu* ABC $(AB = AC)$ *poznat je ugao* φ, *što ga strana* AB *čini sa težišnom linijom* BD. *Koliki je ugao* $CBD = x$?

Imamo $\sphericalangle ADB = \varphi + 2x$ ($\sphericalangle ADB$ je spoljašnji za $\triangle BCD$).

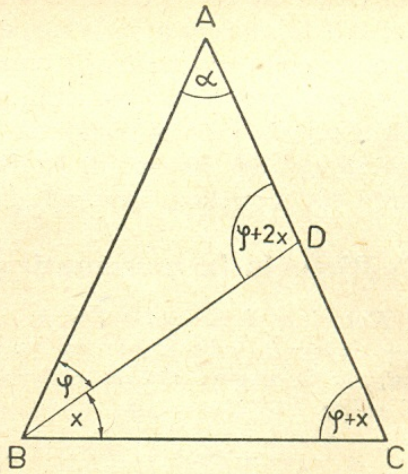
Primenom sinusne teoreme na $\triangle ABD$ izlazi:

$$\sin(\varphi + 2x) : \sin\varphi = 2 : 1$$

t. j. $\sin(\varphi + 2x) - 2\sin\varphi = 0$

dalje je $\sin\varphi\cos 2x + \cos\varphi\sin 2x - 2\sin\varphi = 0$

$\sin\varphi\,(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos\varphi\sin x\cos x - 2\sin\varphi\,(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$.



Podelimo li jednačinu sa $\sin\varphi\cos^2 x$, dobijamo

$$3\,tg^2 x - 2\,cotg\,\varphi - tg\,x + 1 + 0.$$

Za postojanje trougla treba da je $\alpha > 0$ ili $180° - 2(\varphi + x) > 0$, $90° - \varphi > x$ tj. $0 < tg\,x < cotg\,\varphi$. Nepoznata se kreće od 0 do $cotg\,\varphi$.

Zadatak bi imao jedno rješenje ako je

$$f(0)\,f(cotg\,\varphi) < 0 \text{ ili } cotg^2\varphi + 1 < 0$$

što ne može biti ispunjeno.

Zadatak ima dva rješenja ako su ispunjeni uslovi:

1. $D' \geqq 0$, 2. $af(0) > 0$, 3. $af(cotg\,\varphi) > 0$ i 4. $f'(0)\,f'(cotg\,\varphi) < 0$.

1. $cotg^2\varphi - 3 \geqq 0$ za $\sqrt{3} \leqq cotg\,\varphi < +\infty$, (interval uglova gde je $-\infty < cotg\,\varphi \leqq -\sqrt{3}$ ne dolazi u obzir).

2. $1 > 0$ je ispunjen,

3. $cotg^2\varphi + 1 > 0$ je ispunjen i

4. $-2\,cotg\,\varphi\,(6\,cotg\,\varphi - 2\,cotg\,\varphi) < 0$ tj. $-cotg^2\varphi < 0$ također je ispunjen.

Prema tome uslov za postojanje trougla je

$$\sqrt{3} \leqq cotg\,\varphi < +\infty$$

pa se ugao φ nalazi u intervalu od 0° do 30°.

Mudrinski Vojislav
uč. 7d r. g. »Sv. M.« Novi Sad

244. Izračunaj

$$A = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + bx + c} \quad \text{za} \quad x = -\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a - b}}.$$

Imamo

$$A = \frac{\frac{b^2 - ac}{a - b} - a\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a - b}} + b}{\frac{b^2 - ac}{a - b} - b\sqrt{\frac{b^2 - ac}{a - b}} + c}.$$

Množenjem brojioca i imeniоca s $a - b$ izlazi

$$A = \frac{b^2 - ac + ab - b^2 - a\sqrt{(b^2 - ac)(a - b)}}{b^2 - ac + ac - bc - b\sqrt{(b^2 - ac)(a - b)}} =$$

$$= \frac{a\,[b - c - \sqrt{(b^2 - ac)(a - b)}]}{b\,[b - c - \sqrt{(b^2 - ac)(a - b)}]} = \frac{a}{b}.$$

Петровић Олга
уч. 5_1 p. 17 beogr. g. Раковица

245. *Izračunaj*

$$A = \frac{(a^2+a-1)(a^2-a+1) - (a^2+a+1)(a^2-a-1)}{(a^2+a-1)(a^2+a+1) - (a^2-a+1)(a^2-a-1)}$$

Radi bržeg izračunavanja gruписаćemo članove i primenićemo formulu razlike kvadrata. Naime:

$$A = \frac{[a^2+(a-1)][a^2-(a-1)] - [a^2+(a+1)][a^2-(a+1)]}{[(a^2+a)-1][(a^2+a)+1] - [(a^2-a)+1][(a^2-a)-1]} =$$

$$= \frac{[a^4 - (a-1)^2] - [(a^4 - (a+1)^2]}{[a^2 + a)^2 - 1] - [(a^2 - a)^2 - 1]} =$$

$$= \frac{a^4 - (a-1)^2 - a^4 + (a+1)^2}{(a^2 + a)^2 - 1 - (a^2 - a)^2 + 1} =$$

$$= \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{(a^2 + a)^2 - (a^2 - a)^2} =$$

$$= \frac{(a + 1 - a + 1)(a + 1 + a - 1)}{(a^2 + a - a^2 + a)(a^2 + a + a^2 - a)} +$$

$$= \frac{2 \cdot 2a}{2a \cdot 2a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Леваков Вера
уч. 6 p. 2 г. Зрењанин

246. *Umnožak triju uzastopnih brojeva djeljiv je s 504, kad je srednji broj potpuni kub.*

Produkt ima oblik $n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$ (1) i ako je djeljiv s 504, mora biti djeljiv i produktom $7 \cdot 8 \cdot 9$ ($7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$).

Kako broj n može imati jedan od oblika $7q$, $7q + 1$, $7q + 2$, $7q + 3$, $7q + 4$, $7q + 5$, $7q + 6$, to je produkt (1) djeljiv sa 7, jer kada n ima oblik $7q$, onda je n^3 djeljivo sa 7. Kada n ima jedan od oblika $7q + 1$, $7q + 2$, $7q + 4$, onda je $n^3 - 1$ djeljivo sa 7. A kada n ima jedan od oblika $7q+3$, $7q+5$, $7q+6$, tada je $n^3 + 1$ djeljivo sa 7.

Kako n može imati i jedan od ovih oblika $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$, $4q + 3$, to je produkt (1) djeljiv s 8, jer kad n ima jedan od oblika $4q$, $4q + 2$, onda je n^3 djeljivo s 8. A kada n ima oblik $4q + 1$, tada je $n^3 - 1$ djeljivo sa 4, a $n^3 + 1$ sa 2. I najzad kada n ima oblik $4q + 3$, onda je $n^3 + 1$ djeljivo sa 4, a $n^3 - 1$ sa 2.

Budući da n može također poprimiti jedan od oblika $3q$, $3q + 1$, $3q + 2$, to je produkt (1) djeljiv i s 9, jer kad je n u obliku $3q$, n^3 je djeljivo s 9. Kada n ima oblik $3q + 1$ onda je $n^3 - 1$ djeljivo s 9 i konačno kada je n u obliku $3q + 2$, tada je $n^3 + 1$ djeljivo s 9.

Prema tome produkt $n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$ je djeljiv s 504, jer je u svakom slučaju djeljiv i sa 7 i s 8 i s 9.

(Ispravnost svih navedenih činjenica lako je izvesti i dokazati).

Basar Ivan, uč. 7b r. g. Karlovac

247. *Kako bi odredio sve cele brojeve, kojih kvadrat podeljen s 23 daje za ostatak 16?*

Obeležimo sa „x“ traženi broj, a sa „y“ količnik od delenja kvadrata toga broja, sa brojem 23. Pošto je deljenik jednak delioc puta količnik plus ostatak imamo sledeću relaciju:

$x^2 = 23y + 16$ iz ove relacije za $y = 0$ sledi: $x^2 = 16$ ili $x = \pm 4$. Potražimo sad vrednosti za „y“ različite od nule. Napisaćemo gornju relaciju u obliku:

$$(1) \qquad y = \frac{x^2 - 16}{23} = \text{ceo pozitivan broj.}$$

Vidimo da ako neka vrednost „x“ na pr.: $x = 19$ zadovoljava (1) a zadovoljiće i vrednost $x = -19$. Zbog toga za „x“ uvešćemo znak apsolutne vrednosti $|x|$.

Napišemo prvo ovako:

$$y = \frac{(|x| + 4)(|x| - 4)}{23}$$

„y“ će biti ceo broj u slučaju ako je:

$|x| + 4 = 23k \qquad k = 1; 2; 3; \ldots$

ili: $|x| - 4 = 23k \qquad k = 1; 2; 3; \ldots$

Spojimo li oba uslova u jedan dobićemo sledeći traženi oblik „x“:

$$|x| = 23k \pm 4 \qquad k = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots .$$

Prema tome traženi brojevi su:

$$x = \pm 4;\ \pm 19;\ \pm 27;\ \pm 42;\ \pm 50\ \ldots .$$

Grubin B. Nada, uč. 7_1 1 g. Zrenjanin

248. *Сат има 3 сказаљке: сказаљку секунда, сказаљку минута и сказаљку сата;*
а) Кад ће се после 3 сата сказаљка секунда покрити први пут с казаљком сати?
б) Кад ће се после 12 сати казаљка секунда први пут покрити са сказаљком минута?
в) Кад ће се после 3 сата сказаљка секунда бити први пут симетрала угла између сказаљке минута и сказаљке сата?

а) Сказаљка секунда начини у једној секунди угао од 6° док сказаљка сата за то исто време $\left(\frac{1}{120}\right)^\circ$.

Ако је x време после ког ће се сказаљке први пут поклопити, биће

$$90 + \frac{1}{120}x = 6x.$$

Решавањем налазимо

$$x = \frac{10800}{719} = 15{,}02 \ sec.$$

б) Сказаљка минута у једној секунди начини угао од $\left(\frac{1}{10}\right)^\circ$.

За време x_1 (време кад ће се сказаљке први пут поклопити) сказаљка минута начинн угао $\frac{1}{10}x_1$, а сказаљка секунди пређе за то време једном круг па је

$$\frac{1}{10}x_1 = 6x_1 - 360$$

или решавањем $x_1 = 61{,}017$ *sec.*

в) Ако треба да прође време x_2 да би сказаљка секунди била први пут симетрала угла што га чине друге две сказаљке, свака се сказаљка померила за известан угао, и то сказаљка секунди за $6x_2$, сказаљка минута за $\frac{1}{10}x_2$ и сказаљка сати за $\frac{1}{120}x_2$. Изједначимо ли угао између сказаљке минута и секунди са углом сказаљке секунди и сати добијамо релацију:

$$6x_2 - \frac{1}{10}x_2 = 90 + \frac{1}{120}x_2 - 6x_2$$

и решавањем

$$x_2 = \frac{10800}{1427} = 7{,}568 \ sec.$$

Јеремић Душан
уч. 8_3 р. г. »Св. М.« Ниш

249. *Brzi vlak vozi enakomerno preko kolodvora dolžine 300 m 28 sekund, a preko nepremičnega gledaka 8 sekund. Kolika je njegova hitrost in kako je dolg?*

Če je hitrost v, l pa dolžina vlaka, potem je zaradi drugega podatka $l = 8v$. Lokomotiva pa prevozi v 28 sekundah kolodvor in podaljšek za vlakovo dolžino ali:

$$300 + 8v = 28v.$$

Rešitev te enačbe je $v = 15$, torej hitrost vlaka: $v = 15\ m/s$, dolžina vlaka: $l = 120\ m$.

Lesjak Janez, dij. 5. a r. g. Kočevje

250. *Који од кругова $x^2 + y^2 = r^2$ сече елипсу $9x^2 + 25y^2 = 225$ под највећим оштрим углом?*

Решимо једначину елипсе са једначином круга тако да добијемо тачке пресека

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{25 - r^2}, \quad x = \pm\frac{5}{4}\sqrt{r^2 - 9}.$$

Комбинацијом ових решења добијају се сва четири пресека. Ми ћемо посматрати само једно. Најзгодније је оно у првом квадранту тј.

$$M\left(\frac{5}{4}\sqrt{r^2 - 9};\ \ \frac{3}{4}\sqrt{25 - r^2}\right).$$

Једначина тангенте круга у тој тачки биће

$$y = -\frac{5}{3}\frac{\sqrt{r^2 - 9}}{\sqrt{25 - r^2}}x + \frac{4r^2}{3\sqrt{25 - r^2}}.$$

Једначина тангенте елипсе биће

$$y = -\frac{3}{5}\frac{\sqrt{r^2 - 9}}{\sqrt{25 - r^2}} + \frac{12}{\sqrt{25 - r^2}}.$$

Угао под којим се секу елипсе и круг јест угао између тангента

$$tg\,\alpha = f(r) = \frac{1}{15}\sqrt{-r^4 + 34r^2 - 225}.$$

Поткорену величину сведимо на кан. облик

$$tg\,\alpha = \frac{1}{15}\sqrt{-(r^2 - 17)^2 + 64}.$$

Видимо да за $r^2 = 17$, $tg\,\alpha_{maks} = \frac{8}{15}$.

Значи да елипсу $9x^2 + 25y^2 = 225$ сече круг $x^2 + y^2 = 17$ под највећим оштрим углом. Тај угао налазимо логаритмовањем и он излази $\alpha = 28^\circ\,4'\,21'5''$.

Јеремић Душан
уч. 8_3 р. г. »Св. М. Ниш«

251. *Zadane su tačke* $M(-1,2)$ *i* $N(5,4)$ *kao vrhovi dva pramena pravaca. Neka se odredi geom. mjesto sjecišta po dviju zraka tih pramena, kojima su koeficijenti smjera* k i m *su vezani jednačinom* $km = 1$.

Jednačina pramena pravaca kroz tačku $M(-1,2)$ je $y - 2 = k(x + 1)$, a kroz tačku $N(5,4)$ — $\left(\text{obzirom da je } m = \frac{1}{k}\right)$:

$$y - 4 = \frac{1}{k}(k - 5).$$

Pomnožimo li drugu jednačinu sa k i podijelimo prvu sa drugom tako da se k krati, dobićemo:

$$\frac{y-2}{x-5} = \frac{x+1}{y-4}$$

il pomnoženo sa $(x-5)(y-4)$:

$$y^2 - 6y + 8 = x^2 - 4x - 4.$$

Tu jednačinu možemo pisati:

$$y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 - 8$$

$$(x-2)^2 - (y-3)^2 = 8 \qquad \text{ili}$$

$$\frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1.$$

To je istostrana hiperbola oblika

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$$

koja je translatorno pomaknuta tako da joj je centar pomjeren iz koordinatnog početka u tačku $O_1(2,3)$.

Martinis Vinko
uč. 8a r. g. »F. Višnjić« Bijeljina

252. *Ako* n *pripada prirodnom nizu brojeva treba dokazati identičnost*

$$\frac{(2n+1)^5 - 2n - 1}{192} = S_2\left(S_1 + \frac{1}{4}\right)$$

gde je S_1 *i* S_2 *zbir od* n *prirodnih brojeva odnosno zbir kvadrata prirodnih brojeva.*

Stavimo da je leva strana A; tad je

$$A = \frac{(2n+1)^5 - (2n+1)}{192} =$$

$$= \frac{(2n+1)[(2n+1)^4 - 1]}{192} =$$

$$= \frac{(2n+1)[(2n+1)^2 - 1][(2n+1)^2 + 1]}{192} =$$

$$= \frac{(2n+1)(4n^2+4n+1-1)(4n^2+4n+1+1)}{192} =$$

$$= \frac{(2n+1)(4n^2+4n)(4n^2+4n+2)}{192} =$$

$$= \frac{(2n+1)n(n+1)(2n^2+2n+1)}{6 \cdot 4} =$$

$$= \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} \cdot \frac{2n^2+2n+1}{4} =$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4}\right].$$

Kako je

$$S_2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}, \quad \text{a} \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

pa je $A = S_2\left(S_1 + \frac{1}{4}\right)$ što je trebalo i dokazati.

Божилов Славчо, уч. 8а р. г. Босилеград

Pravodobno riješili zadatke iz 2. broja

Čanji Ema, uč, 7_5 raz. g. Sombor, 230, 232, 233, 235, 236; *Milović Nikola*, uč. 3b m. S. T. Š., Mostar, 228, 229, 230, 233, 238 (djel.); *Toth Arpad*, uč. 7_7 r. gimn. Zrenjanin, 229; *Брусин Миливој*, уч. 7_2 раз. г. Зрењанин, 228, 229, 230, 233, 235; *Ђорђевић Д. Владан*, уч. 8_7 р. гимн. Крушевац, 229, 230, 231, 232, 233, 236, 238, 239; *Карацалиев Димитар*, уч. 7 а кл. гимн. »J. Јосиф.«, Гевгелија 229, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238; *Ковачевић Д. Мирослав*, уч. 7_1 раз. г. Трстеник, 229, 236; *Поповић Љиљана*, уч. 7_4 р. 11 беогр. г. 228, 232, 236; *Ристовић Миодраг*, уч. 7_2 раз. 11 беогр. г. 229, 230, 236; *Шешић Љубиша*, уч. 7_5 р. 11 беогр. гимн. 229, 230, 232, 233.

Riješili zadatke iz 3. broja

Babić Branka, uč. 5b raz. 2. g. Zagreb, 248 (djelom.); *Barta Sándor*, uč. 6_5 r. g. Sombor, 241 (djel.), 244, 245, 249; *Basar Ivan*, uč. 7.b r. g. Karlovac, 240, 231, 242 (djel.), 244, 245, 246 247, 248, 249, 250; *Begović Fehim*, uč. 6.b raz. g. Doboj, 245; *Bibić Zorica*, uč. 5.c r. gimn. »J. L. Ribar«, Osijek, 245, *Birt Dubravko*, uč. 5.d raz. gimn. »Vladimir Majder,« Sisak, 245; *Božičković Branka*, uč. 5.b raz. 2. gimn. Zagreb, 248 (djelom.); *Brajović Ljiljana*, uč. 7. r. 8 gimn. Beograd, 240, 241 (djel.), 244, 245; *Brzica Marko*, uč. 2 e STŠ Sarajevo, 241, 244, 245; *Cigić Pero*, uč. 3_1 e STŠ Sarajevo, 245; *Dobrić Dragica*, uč. 6. r. g. Vršac, 245; *Drašković Radoje*, uč. 6.a r. g. Cetinje, 241; *Grgić Josip*, uč. 6.c r. g. Nova Gradiška, 245; *Gros Mladen*, uč. 6.a r. kl. g. Ljubljana, 244, 245, 247; *Grubin B. Nada*, uč. 7_1 raz. g. Zrenjanin, 240, 244, 245, 247, 249; *Ibrahimović Šemsadir*, uč. 6.a r. g. Brčko, 241 (djel.), 244, 245; *Jamičić Vlatko*, uč. 7.b raz. g. Našice, 241, 245, 249; *Janežič Jana*, uč. 8.b r. 1. gimn. Ljubljana, 240, 241, 242 (djelom.), 244, 245, 248; *Janković Vukašin*,

5.c r. g. Cetinje, 245; *Josić Danilka*, uč. 6_1 r. g. Sombor, 241; *Josić Danilo*, uč. 6_2 r. g. Sombor, 244, 245; *Jović S. Dragoljub*, uč. 8_2 r. g. Vlasotince, 240, *Kanoni Jasna*, uč. 8. b r. 10. g. Ljubljana, 241, 244, 245, 250 (djel.); *Kobrehel Karoly*, uč. 5.c r. g. Subotica, 244, 245; *Kobrehel Peter*, uč. 7.a raz. g. Subotica, 240, 244, 245, 249; *Kovač Antal*, uč. 6_5 r. g. Sombor, 244, 245, 249; *Kovačević Josip* i *Kapetanović N.*, uč. 8.b raz. g. Slav. Požega, 244, 248 (djel.); *Kovačević Milorad*, uč. 5. b r. g. Cetinje, 245; *Kulišić Petar*, uč. 7. r. g. Dubrovnik, 240, 241, 242 (djel.), 243, 244, 245, 247, 248, 252; *Lajevec Tine*, uč. 6.a r. kl. g. Ljubljana, 245, 249, *Lesjak Janez*, uč. 5.a r. g. Kočevje, 241, 242 (djel.), 245, 249, 251; *Maksić Dobrivoje*, uč. 6_3 r. g. Trstenik, 245; *Marjanović Nikola*, uč. 7.a r. g. Celje, 240, 244, 245; *Martinis Vinko*, uč. 8. a r. g. »F. Višnjić«, Bijeljina, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 250, 251, 252; *Martinović Radovan*, uč. 8. b raz. g. Cetinje, 240, 250, 252; *Mesihović Behđed* uč. 5_4 r. g. Mostar, 244, 245, 246, 249; *Mijatović Zorka*, uč. 5_2 r. 13 beogr. g. 245; *Miketinac Milivoj*, uč. 7. d 3. g. Zagreb, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 247, 248, 249, 250, 252; *Mitrović S.* uč. 2_2 m. *STŠ* Sarajevo, 244; *Penzeš Đuro*, uč. 6_5 r. g. Sombor, 244, 245, 249; *Petričević Josip*, uč. 7.d raz. 3. g. Zagreb, 240, 241 (djelom.), 244, 245, 249, 252; *Pribilla Matija*, 6_5 r. mađ. g. Sombor, 245, 249; *Radan Dušan*, uč. 2. a raz. m. *STŠ*, Mostar, 240, 245, 249; *Ravnić Milivoje*, uč. 8. raz. g. Plevlja, 245; *Rojović Suboslav*, uč. 17. beogr. g. Rakovica, 245; *Stojčeva Penka*, uč. 5.b r. gimn. »J. B Tito« Bitola, 244, 245; *Stojković Angelina*, uč. 8_4 raz. g. Niš, 240, 244, 245, 246 (djel.); *Šiber Stjepan*, uč, 8. r. g. Gradačac, 244, 245; *Šulić Milan*, uč. 7_5 r. 2. g. Sarajavo, 241; *Todorović Milenko*, uč. 3.b m. r. *STŠ* Mostar, 240, 241 (djelom.), 242 (djel.), 244, 246, 248 (djelom.), 249; *Zaćko Mihajlo*, uč. 8.c raz. 2. gimn. Novi Sad, 241; *Zečević Dragoljub*, uč. 6. b razr. gimn. Doboj, 245; *Анђелковић Боривоје*, уч. 8_3 р. г. Приштина, 240, 241, 244, 245, 251; *Асурџић Гордана*, уч. 5_1 раз. 17 беогр. г. 244, 245, 247, 252; *Банковић С. Ђорђе*, уч. 4_3 раз. уч. школе Алексинац, 240, 244, 245, *Бебић Драган*, уч. 7_5 р. гимн. Ваљево, 241, 245; *Бирољев Мира*, уч. 6_1 р. 2 г. Зрењанин, 245, 249; *Божилов Славчо*, уч. 8а р. г. Босилеград, 240, 241, 244, 245, 252, *Васковардић Р. Станко*, уч. 7_1 р. г. Трстеник, 244, 245; *Волић Јелисавета*, уч. 6_4 р. гимн. Сомбор, 241, (дел.), 244, 245; *Врачарић Мирјана*, уч. 6_4 раз. г. Сомбор, 241, 244, 245, 249; *Вулетић Светозар*, уч. 8_2 р. г. Стари Бар, 252; *Гавриловић Љиљана*, уч. 5 р 17 беогр. г. 244, 245, 247, 252; *Гергинов Драган*, уч. 8 д кл. г. Босилеград, 241, 244, 245, 252; *Грубнић Босиљка*, уч. 6а раз. г. »Св. М.« Нови Сад, 241, 245, 249; *Димић Александар*, уч. 6_2 р. г. »Ст. Ср.« Ниш, 244, 245; *Димитријевић Љиљана*, уч. 8_2 раз. г. Урошевац, 240, 244, 245; *Дрешевић Милан*, уч. 8с р. г. Бања Лука, 241, 242 (делом), 246, 252: *Ђенадић Драгољуб*, уч. 7_5 раз. г. Прокупље, 240, 242 (дел.), 244, 245; *Ђорђевић Драган*, уч. 7_2 р. г. Урошевац, 244, 245; *Ђукановић Радојица*, уч. 5_3 р. г. Ваљево, 245; *Ђуричић Гојко*, уч. 8а р. гимн. Цетиње, 241 (дел.), 244, 245, 252; *Ђуровић Гордана*, уч. 5_4 р. г. Ваљево, 245; *Иванов Н. Дејан*, уч. 5_5 раз. г. Босилеград, 245; *Иванов Драган*, уч. 8*b* раз. г. Босилеград, 241, 242, 244, 245, 252; *Јеремић Душан*, уч. 8_3 р. г. »Св. М.« Ниш, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252; *Јеремић Ђурђе*, уч. 5_3 р. г. »Св. М.« Ниш, 242, 244, 245, 246, 248, 249; *Јеремић Биљана*, уч. 5_4 раз. г. »Св. М.« Ниш, 244, 245, 249; *Јовановић Жарко*, уч. 8_3 р. гимн. »Св. М.« Ниш, 241, 244, 245, 247, 249; *Калајџић Милисав*, уч. 5_3 р. гимн. Чачак, 245; *Капларевић Љиљана*, уч. 5 р. 17 беогр. гимн. Раковица, 244, 245, 252; *Карацалиев Димитар*, уч. 7_4 кл. г. »J. Јосиф« Гевгелија, 240, 243 (дел.), 244, 246, 248, 252; *Керме Томислав*, уч. 7б р. гимн. »Ст. Ср.« Ниш, 240; *Ковачевић Д. Мирослав*, уч. 7_1 раз. гимн. Трстеник, 241 (дел.), 244, 245; *Курјачки Смиља*, уч. 6_4 р. г. Врбас, 241, 244, 245; *Леваков Вера*, уч. 6_1 р. г. Зрењанин, 241, 244, 245, 249; *Живковић Златомир*, уч. 7_1 р. гимн. Ћуприја, 240, 245; *Зарев Ст. Кирија*, уч. 6 р. г. Босилеград, 245; *Марковић Александар*, уч. 6_1 раз. 17 беогр. г. 245; *Марковић Александар*, уч. 6_1 р. 5 беогр. г. 245; *Матејић Цвета*, уч. 8_1 р. г. Урошевац, 240, 241 (дел.); *Милошевић Миодраг*, уч. 7 р. $г_1$ Урошевац, 241, (дел.), 244, 246; *Михаиловић Мирјана*, уч. 5_3 р. 13 беогр. г. 245; *Мудрински Војислав*, уч. 7д р. г. »Св. М.« Нови Сад, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 248, 249; *Николић Д. Томислав*, уч. 7_3 р. 13 беогр. г. 245, 247; *Пенић Слободан*, уч. 8_1 раз. г. Рума, 245, 252; *Петровић Гавра*, уч. 7а раз. г. Шид, 240, 245; *Петровић Олга*, уч. 5_1 разр. 17 беогр. гимн. Раковица, 244, 245, 247, 252; *Пиљић Слободан*, уч. 5_2 р. гимн. Ћуприја, 245; *Пујић Слобољуб*, уч. 7_2 р. г. Књаже-

бац, 244, 245; *Поповић Јован*, уч. 5а р. г. Цетиње, 245; *Поповић Љиљана*, уч. 7_4 р. 11 беогр. г. 240, 245; *Радишић Нада*, уч. 7_3 раз. г Зрењанин, 245; *Радовановић Нинослав*, уч. 6_2 р. гимн. »Ст. Сремац« Ниш. 241, 244, 245; *Радовановић Радмила*, учен. 5_3 р. гимн. »Св. М.« Ниш, 244, 245, 248; *Радосављевић Гордана*, уч. 5_1 р. 17 беогр. г. 245, 252; *Ражнатовић Зарије*, уч. 6_3 р. г. Трстеник, 245; *Савић Драгиша*, уч. 8_3 р. гимн. Приштина, 240, 244, 245; *Спасов Славчо*, уч. 8а р. г. »Г. Делчев« Куманово, 245, 247; *Стевановић Томислав*, уч. 6 б р. г. »Ст. Ср.« Ниш, 245; *Туцаковић Мирјана*, уч. 6_4 р. гимн. Сомбор, 244, 244; *Христов Мира*, уч. 6_4 р. г. Сомбор, 244, 245, 249; *Чирљаковић Машинка*, уч. 8_1 р. 17 беогр. г. Раковица, 252; *Шошић Томислав*, уч. 6_2 »Ст. Ср.« Ниш, 244, 245; *Шулић Милан*, уч. 7_5 р. 2. г. Сарајево, 244, 245, *Шутовић Вера*, уч. 5_4 раз. гимн. »Св. М.« Ниш, 245, *Bognut Šandor*, uč. 7a raz. g. Subotica, 240, 241, 244, 245, 249; *Lekić Alija*, uč. 7 b raz. 4. gimn. Sarajevo, 240, 241, 244, 245, 247; *Mere István*, uč. 6_5 r. g. Sombor, 244, 245, 249; *Stražnik Sado*, uč. 7.a r. g. Kranj, 245, 249, 252; *Tuševljak Nenad*, uč. STŠ Sarajevo, 244, 245; *Брусин Миливој* уч. 7_2 р. г. Зрењанин, 240, 241, 244, 245, 249; *Гролингер Едуард*, уч. 6_4 раз. г. Сомбор, 244, 245; *Ђорђевић Живојин*, уч. 8 р. г. Прокупље, 240, 241, 245, 248, 249, 251, 252; *Константинидис Јорго*, уч. 8 р. »Ј. Б. Тито« Скопје, 240, 241, 242, 343, 250, 251, 252; *Кружок математички*, 1 зем. гимн. 241; *Летић Милан*, уч. 6 е р. г. Суботица, 244, 245; *Маринов Трпче*, уч. 8 р. кл. г. »Ј. Б. Тито« Битола, 240, 241, 242 (дел.), 243, 244, 245, 252; *Марковић Милентије*, уч. 8_3 р. г. Приштина, 240, 244, 245; *Марковић Радомир*, уч. 8_3 р. г. Приштина, 240, 241, 244, 245, 246, 251; *Марковић Ратомир*, уч. 6_2 раз. гимн. Ћуприја, 241, 244, 245, 249; *Михаиловић Војислав*, уч. 8_3 р. г. »Ст. Ср.« Ниш, 240, 241 (дел.), 242 (дел.), 244, 245, 246, 250, 251, 252; *Радовић Душан*, уч. 8 раз. г. Приштина, 245, 246; *Станковић Б. Мирослав*, уч. 7_5 р. гимн. Прокупље, 240, 241, 242 (дел.), 244, 245, 247.

D) Rješenja zadataka iz fizike

131. *Tijelo težine $T = 5$ kp spušta se niz kosinu dužine $l = 5$ m dižući tijelo težine $T' = 2$ kp, koje se penje duž visine $h = 3$ m. Koja je akceleracija nastalog gibanja i za koje se vrijeme tijelo težine T' digne za visinu h?*

Sila koja proizvodi gibanje je $T \sin\alpha - T'$, gdje je α kut pod kojim je nagnuta kosina. Neka je a tražena akceleracija, onda iz 2. Newtonovog zakona izlazi:

$$\frac{a}{T' \sin\alpha - T'} = \frac{g}{T + T'},$$

gdje je g gravitacija.

Iz gornje jednadžbe je:

$$a = g\,\frac{T \sin\alpha - T'}{T + T'}.$$

U našem zadatku $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, pa je

$$a = 9{,}81\,\frac{5 \cdot {}^3/_5 - 2}{5 + 2}\,m\,s^{-2} = \underline{1{,}40\,m\,s^{-2}}.$$

Znamo, da je vrijeme t, koje je potrebno, da tijelo gibajući se jednoliko ubrzano akceleracijom a, prevali put h, dano formulom:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

U našem zadatku je onda:

$$t = \sqrt{\frac{2h\,(T + T')}{g\,(T \sin\alpha - T')}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3\,(5 + 2)}{9{,}81\,(5 \cdot {}^3/_5 - 2)}} = \underline{2{,}07\,s}.$$

132. *Tijelo gustoće d stavi se bez početne brzine na površinu sloja tekućine dubine h i gustoće d' ($d' < d$). a) Za koje će vrijeme tijelo stići na dno sloja? b) Koja je njegova kinetička energija na kraju tog vremena, ako mu je masa m?*

Ako je volumen tijela V, onda je njegova masa $V \cdot d$, a težina $V \cdot d \cdot g$. To tijelo pak uronjeno u tekućinu ima prividnu težinu $V\,(d - d')\,g$. Dakle, iz 2. Newtonovog zakona izlazi:

$$V\,(d - d')\,g = V \cdot d \cdot a,$$

t. j.
$$a = \frac{d - d'}{d}\,g.$$

a) Vrijeme t za koje će tijelo stići na dno sloja (vidi zad. 131.) je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \underline{\sqrt{\frac{2hd}{g\,(d - d')}}}.$$

b) Za brzinu v kod jednoliko ubrzanog gibanja vrijedi formula $v = \sqrt{2ah}$, a kinetička energija E tijela dana je formulom $E = \frac{1}{2}mv^2$.

U našem zadatku je onda

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \cdot 2gh\,\frac{d - d'}{d} = \underline{mgh\,\frac{d - d'}{d}}.$$

133. *Njihalo sata udara sekunde kod 15°C na mjestu, gdje je $g = 9{,}8\ m\,s^{-2}$. a) Koliko je*

trajanje njihaja, ako se temperatura povisi na 25°C i za koliko sekunda kasni sat u jednom danu? b) U koju bi visinu trebalo donijeti sat, da on za isto toliko kasni, ako temperatura ostane 15°C? (koeficijent rast. $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$, $R = 6370$ km).

a) Ako je l_0 dužina njihala kod 0°C, onda je njegova dužina kod 15°C jednaka $l_{15} = l_0(1 + 15\alpha)$, a kod 25°C je $l_{25} = l_0(1+25\alpha)$. Prema formuli za trajanje jednog njihaja $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, možemo pisati:

$$\text{kod } 15°\text{C}: \quad 1 = \pi\sqrt{\frac{l_0(1+15\alpha)}{g}},$$

$$\text{kod } 25°\text{C}: \quad t = \pi\sqrt{\frac{l_0(1+25\alpha)}{g}}.$$

Podijelivši gornje dvije jednadžbe jednu s drugom, dobijemo, da je vrijeme njihaja t kod 25°C

$$t = \sqrt{\frac{1+25\alpha}{1+15\alpha}} = \underline{1{,}00006\,s}.$$

Kod 25°C, sat kod svakog njihaja zakasni za 0,00006 s, a u danu učini $\frac{24 \cdot 3600}{1{,}00006}$ njihaja. Znači, da će tokom jednog dana sat zakasniti za $\frac{24 \cdot 3600}{1{,}00006} \cdot 0{,}00006\,s \approx \underline{5\,s}$.

b) Gravitacija se smanjuje s visinom po zakonu

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

gdje je g' gravitacija na visini h. (Ova formula izlazi iz Newtonovog zakona gravitacije).

Zadatak zahtjeva da je

$$\pi\sqrt{\frac{l_{25}}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l_{15}}{g'}}.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi izlazi:

$$\frac{l_{15}}{l_{25}} = \frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

iz ove pak jednadžbe je

$$h = R\frac{\sqrt{l_{25}} - \sqrt{l_{15}}}{\sqrt{l_{15}}} = R\frac{\sqrt{1+25\alpha} - \sqrt{1+15\alpha}}{\sqrt{1+25\alpha}} =$$

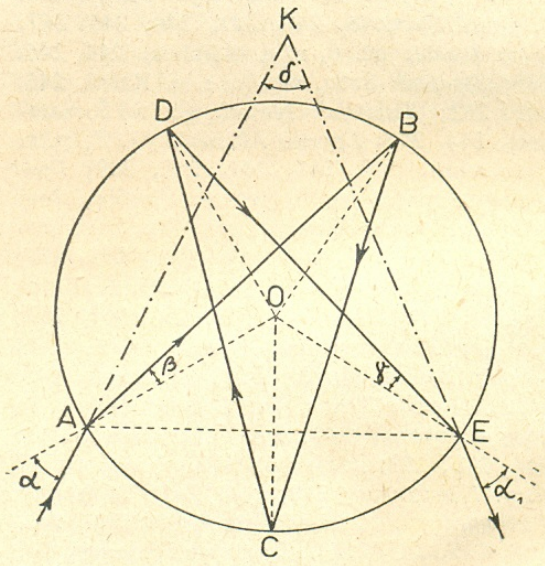
$$= R\,(t - 1) = 6370 \cdot 0{,}00006 = \underline{0{,}382\ km}.$$

134. *U električnom kuhalu za 220 V i 3 A treba ugrijati 1 kg vode od 10°C do 100°C. a) Kako to dugo traje? b) Koliko to stoji, ako se računa 1 kWh 10 din?*

a) Našim kuhalom trebamo dobiti $1 \cdot (100 - 10)\ kcal = 90\ kcal = 90\,000\ cal$. Budući da je $1\ cal = 4{,}186\,J$, kuhalom trebamo dobiti $90\,000 \cdot 4{,}186\,J = 376\,740\,J$. Kuhalo ima snagu $220 \cdot 3\,W = 660\,W = 660\,J\,s^{-1}$. Da kuhalo proizvede energiju od 376 740 J treba $(376\,740 : 660)\ s = \underline{570\ s}$.

b) Da kuhalo zagrije 1 *kg* vode od 10°*C* na 100°*C* proizvede energiju od $376\,740\,J = 376\,740\ Ws = (376\,740 : 36\,000)\ Wh = \frac{104}{1000}\ kWh = 0{,}104\ kWh$. Ako 1 *kWh* stoji 10 *Din*, onda ćemo za to grijanje platiti $0{,}104 \cdot 10\ Din = \underline{1{,}04\ Din}$.

135. *Zraka monohromatske svjetlost prodre u nutrinju staklene kugle indeksa loma n pod kutom upadanja α; u kugli se 3 put reflektira (djelomično) i izlazi iz kugle u zrak. a) Izrazi devijaciju δ, što je čini zraka, koja izlazi sa zrakom koja ulazi, u funkciji od α i pripadnog kuta loma β. b) Koliki je indeks loma n tog stakla? (Kutovi α i δ se mogu mjeriti).*



a) Budući da su trokuti *OAB*, *OBC*, *OCD* i *ODE* istokračni (vidi sl.), izlazi, da je kut γ pod kojim zraka upada u točku *E* jednak kutu loma β u točki *A*. Zbog toga kut α_1, pod kojim zraka izlazi iz kugle u točki *E* jednak je kutu upadanja α u točki *A*.

U istokračnom trokutu *OAE* kut kod vrha *O* jednak je 8β, jer je to središnji kut iznad istog luka nad kojim su obodni kutovi u točkama *B* i *D*, a svaki od ta dva obodna kuta ima 2β. Dakle kut kod vrha *A* u istokračnom trokutu *OAE* jednak je $\pi/2 - 4\beta$.

U istokračnom trokutu *AEK*, kut kod vrha *A*, odnosno *E*, je prema tome jednak $\pi/2 -$

$-4\beta+\alpha$. Kut kod vrha K, a to je traženi kut devijacije δ, jednak je

$$\delta=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-4\beta+\alpha\right)=\underline{8\beta-2\alpha}.$$

b) Budući, da je indeks loma stakla $n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, a u našem je $\beta=\frac{\delta+2\alpha}{8}$ izlazi, da je indeks loma stakla kugle

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\delta+2\alpha}{8}}.$$

Riješili zadatke iz fiz. iz 3. broja

Šimunović Bruno, 8.d 4. g. Zagreb, 133 (djelom.), 134, 135 (djelom.); *Basar Ivan*, 7. b r. g. Karlovac, 131, 132, 133 (djelom.), 134, 135 (djelom.); *Ivanov Dragan*, 8. b r. gimn. Bosilegrad, 134; *Kosec Vladislav*, 8. r. 12. g. Ljubljana, 131, 132 (djelom.), 133 (djelom), 134; *Grgić Josip*, 6. c raz. g. Nova Gradiška, 131 (djelom.), 134 (djelom.); *Merivorić Behded*, 5_4 r. v. g. Mostar, 134; *Kanoni Jasna*, 8. raz. 10. g. Ljubljana, 134; *Gros Mladen*, 6. a raz. kl. g. Ljubljana, 131 (djelom.), 134; *Petričević Josip*, 7. d raz. 3. g. Zagreb, 131, 134; *Дрешевић Милан*, 8 с р. г. Бања Лука, 134; *Miketinac Milivoj*, 7. d r. 3. g. Zagreb, 131, 132, 133 (djelom.), 134; *Šmigoc Karel*, 8.b r. 2. g. Celje, 131 (djel.), 132, 133 (djel.), 134; *Tuševljak Nenad*, 2 e STŠ, Sarajevo, 134; *Маринов Трпче*, 8 р. в. г. Битола, 134; *Ђорђевић Живојин*, 8_4 в. г. Прокупље, 133 (делом.) 134; *Марковић Радомир*, 8_3 р. г. Приштина 134 (делом.); *Јовановић Жарко*, 8_3 р. г. Ниш, 134; *Јеремић Душан*, 8_3 р. г. Ниш, 134 (делом.), 134, 135 (делом); *Brzica Marko*, 2_1 STŠ, Sarajevo, 134.

Naknadno na vrijeme stigla rješenja zadataka iz fizike iz br. 2

Milojević Nikola, 3. b maš. od, STŠ Mostar, 126, 127, 128 130 (djelomično); *Карацалиев Димитар*, 7 а р. в. г. Гевгелија, 126 (делом.); *Šmigoc Karel*, 8. b r. 2. g. Celje, 126 (djelom.), 127, 128, 130; *Šante Šandor*, Zrenjanin, 127; *Toth Arpad*, Zrenjanin, 126; *Ђорђевић Владан*, 7 б р. в. м. г. Крушевац, 126, 127, 128, 130 (делом.); *Поповић Љубомир*, 7. раз. г. Аранђеловац, 126; *Брусин Миливој*, 7. р. г. Зрењанин, 126 (делом.), 127 (делом.), 128, 129 (делом.), 130.

Vježbe iz matematike za prijemni ispit*

za učenike 8. raz. osmog. škole

Riješi sistem:

1. $$\frac{0{,}11x-0{,}04y}{15}-\frac{0{,}13x-0{,}05y}{18}=\frac{x-0{,}1}{30}+\frac{y+0{,}1}{45},$$

$$\frac{x+y}{6}-\frac{x-y-0{,}2}{21}=\frac{2x+3y+0{,}1}{42}-\frac{5x+2y-0{,}3}{14}.$$

Uredivši te jednadžbe dobivamo

$$299x+199y=10,\quad 3x+2y=0{,}1$$

i odatle $x=0{,}1$, $y=-0{,}1$.

2. Riješi sistem

$$-\frac{5}{3x+2y}-\frac{7}{5x-2y}=\frac{1}{2},$$

$$-\frac{4}{2(3x+2y)}+\frac{7}{2(5x-2y)}=1.$$

Stavi $\frac{1}{3x+2y}=u$, $\frac{1}{5x-2y}=v$, izlaz i $u=-\frac{1}{20}$, $v=-\frac{1}{28}$, pa je $x=-6$, $y=-1$.

3. Odredi linearnu funkciju, koja za $x=6$ poprima vrijednost 8, a za $x=-15$ vrijednost -6.

Opći je oblik linearne funkcije $y=ax+b$; ona je sasvim određena, ako poznamo a i b. Kako je za $x=6$, $y=8$, mora biti $8=6a+b$; kako je nadalje za $x=-15$, $y=-6$, mora biti $-6=-15a+b$. Oduzimanjem tih 2 jednadžbi izlazi $14=21a$, $a=\frac{2}{3}$, $b=8-$ $-6\cdot\frac{2}{3}=4$, zato je $y=\frac{2}{3}x+4$.

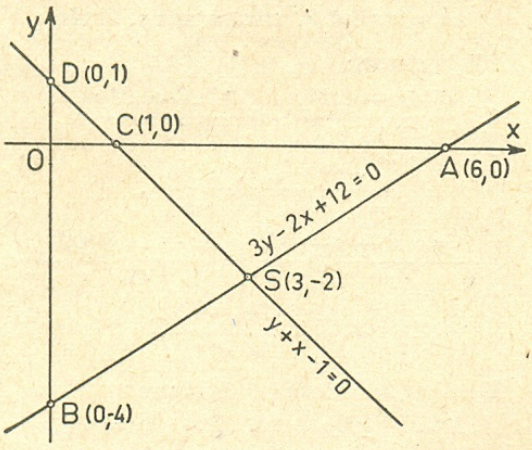
4. Riješi grafički sistem:

$$3y-2x+12=0,$$
$$y+x-1=0.$$

Najprije nacrtajmo pravac $3y-2x+12=0$; pravac ćemo najzgodnije nacrtati, da odredimo točke, u kojima on siječe koordinatne osi: za sjecište s osi x stavimo u jednadžbu $y=0$, pa izlazi $x=6$; za sjecište s osi y je $x=0$,

* Za učenike u onim Narodnim republikama, gdje se taj ispit održava.

pa izlazi $3y + 12 = 0$, $y = -4$. Slično se nalazi za drugi pravac za $y = 0$, $x = 1$, za



$x=0$, $y=1$. Oba se pravca sijeku u S(3, —2), te je onda $x = 3$, $y = -2$ rješenje sistema određeno grafički.

5. Osnovna je ivica pravilne 6-strane piramide $a = 6\ cm$; kolika je visina te piramide, ako je omotač 7 puta veći od baze?

Iz $O = 3au = 7 \cdot \frac{6a^2}{4}\sqrt{3}$ izlazi $u = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$,

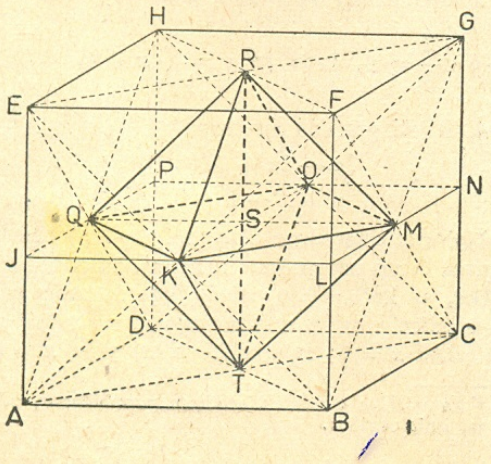
$$v = \sqrt{u^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{147a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{144a^2}{4}} = 6a.$$

6. Ako se spoje centri strana kocke, dobije se oktaedar. Kolika je njegova zapremina, ako je dijagonala kocke 6 *cm*?

Ako je dijagonala kocke 6 *cm*, to iz

$d = a\sqrt{3}$ izlazi $a = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ cm$;

zapremina je oktaedra, ako je njegova ivica b,



$$V = \frac{b^2}{3} \cdot a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{a^3}{6}$$ (jer je $b^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$) $= \frac{(2\sqrt{3})^3}{6} = \frac{24\sqrt{3}}{6} = 4\sqrt{3}\ cm^3$.

7. Kolika je površina i zapremina oko oktaedra ivice $a = 12\ cm$ opisane lopte?

$P = 4r^2\pi$, a jer je $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (vidi pred. sl.), to je $P = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 2\pi = 2a^2\pi = 288\pi\ cm^2$;

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}\frac{a^3}{8} \cdot 2\sqrt{2}\pi = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}\pi = 576\sqrt{2}\pi\ cm^3.$$

Nagrađeni rješavatelji zadataka

Redakcija Mat. fiz. lista nagradila je zbog marljivog i uspješnog rješavanja zadataka a) iz matematike s najmanje 3 od ovih knjiga:

1) Sevdić, Matematička čitanka; 2) Škarica, Kvadratura kruga; 3) Polya, Kako ću riješiti matematički zadatak; 4) Dr. Kurepa, Teorija skupova; 5) Берасимовић, Матурски задаци из математике; 6) Courant, курс диф. и инт. рач. I. — ove učenike:

1. **Basar Ivan,** uč. 7.b r. gimn. Karlovac;
2. **Brusin Milivoj,** uč. 7_2 r. g. Zrenjanin;
3. **Đorđević Vladan,** uč. 8_7 r. g. Kruševac;
4. **Đorđević Živojin,** uč. 8_4 r. g. Prokuplje;
5. **Janežič Jana,** uč. 8b r. 1. g. Ljubljana;
6. **Jeremić Dušan,** 8_3 r. g. »Sv. M.«, Niš;
7. **Kanoni Jasna,** 8. b r. 10. g. Ljubljana;
8. **Kovač Antal,** uč. 6_5 raz. gimn. Sombor;
9. **Marinov Trpče,** 8 r. g. »J. B. T.« Bitola;
10. **Martinis Vinko,** 8a r. g. »F. V.« Bijeljina;
11. **Miketinac Milivoj,** 7.d r. 3. g. Zagreb;
12. **Mudrinski Vojislav,** 7d r.g. »S. M« N.Sad;
13. **Nikolić Ilonka,** uč. 8. r. gimn. Đakovo.

b) iz fizike s najmanje po dvije knjige od ovih knjiga:

1) Supek: Teorijska fizika; 2) Varićak—Vernić: Vježbe iz fizike; 3) Rozgaj: Razvitak astronomije — ove učenike:

1. **Basar Ivan,** uč. 7. b r. gimn. Karlovac;
2. **Đorđević Živojin,** uč. 8_4 r. g. Prokuplje;
3. **Jeremić Dušan,** 8_3 r. g. »Sv. M.«, Niš;
4. **Kosec Vladislav,** 8. r. 12. g. Ljubljana;
5. **Lojen Miroslav,** 6.a r. gimn. Varaždin;
6. **Marinov Trpče,** uč. 8. r. gimn. Bitola;
7. **Miketinac Milivoj,** 7. d r. 3. g. Zagreb;
8. **Šimunić Bruno,** 8. d raz. 4. g. Zagreb;
9. **Šmigoc Karel,** uč. 8. b raz. 2. g. Celje;
10. **Žerjav Tone,** uč. 8. b r. gimn. Brežice.

Rješenje ukrštenice iz br. 3 i nagrađeni rješavatelji

Vodoravno		*Uspravno*	
2 —	384 180	1 —	154 449
6 —	5 050	2 —	3 521
8 —	47	3 —	80
9 —	432	4 —	142
10 —	5 267	5 —	8 763
12 —	100	7 —	0,3
14 —	35	10 —	504
15 —	4,5	11 —	753 420
17 —	140	13 —	0,16
19 —	9 396	16 —	5 329
21 —	3,14	18 —	0,314
23 —	29	20 —	999
24 —	7 122	22 —	12
25 —	1,99 564	24 —	76

Autor ove ukrštenice je, kako je spomenuto, Nikolić Tomislav; on je učenik 7. razreda XIII. beogradske gimnazije. Za rješenje je trebalo dosta strpljenja, naročito za 11. uspravno. Stiglo je 81 rješenje, od toga 58 ispravnih. Ždrijebom su izvučena rješenja ovih učenika;

1. Ćirić Nadežda, 8. r. I. gimn. Beograd
2. Grgić Josip, 6.c raz. g. Nova Gradiška
3. Ivanov Dejan, 5.a r. gimn. Bosilegrad
4. Josifoski Danail, 8.d klas. gimn. Prilep
5. Jovanović Slobodan, 8$_1$ r. g. Svetozarevo
6. Klun Marija, 5. raz. gimn. Kočevje
7. Mudrinić Boško, 2. el. raz. tehn. škole Osijek
8. Peruničić Boško, 8. r. g. Plevlja
9. Spasojević Živojin, 5. r. g. Trstenik
10. Šanta Aleksandar, 7$_1$ raz. g. Zrenjanin

Ovi rješavatelji su nagrađeni knjigom Sevdić, Matematička čitanka.

ANKETA

Naša je zajednička želja, da Matematičko-fizički list bude što bolji, da zgodnim i interesantnim člancima, zadacima i sl. što više proširi i produbi učenikova znanja i vještine u matematici i fizici. Zbog toga molimo čitaoce, da nam iskreno (i čitljivo, na posebnom papiru!) odgovore na ova pitanja:

1. Koji ti se članak u VII. godištu (1956-57) najviše svidio a) iz matematike, b) iz fizike? Zašto?

2. Koji ti se članak u prošlim godištima najviše svidio a) iz matematike, b) iz fizike? Zašto? (Neka odgovore oni, koji su već dulje pretplaćeni na list).

3. Koji ti se zadatak u VII. godištu (1956-57) najviše svidio a) iz matematike, b) iz fizike? Zašto?

4. Navedi neke konkretne teme, koje te najviše interesiraju, pa bi želio da se o njima u listu piše.

5. Sve ostale tvoje (pozitivne i negativne) primjedbe, prijedlozi, mišljenja i t. d.

Molimo, da se odgovori pošalju do 10. VI. 1957. Na kuverti naznačiti »Anketa«. Primaju se i kolektivni odgovori, na pr. čitavih razreda, učeničkih grupa i dr.

Uređivački odbor
Matematičko-fizičkog lista za učenike srednjih škola
Zagreb, Ilica 16, III. kat
Poštanski pretinac 165

BROJ PRETPLATNIKA NA MAT. FIZ. LIST NA POJEDINIM ŠKOLAMA 1956/57

1. *Ajdovščina*, g. (4); 2. *Aleksinac*, uč. šk. (71), g. (4); 3. *Aranđelovac*, g. (13); 4. *Bačka Palanka* g. (26), osm. šk. (4); 5. *Bačka Topola*, osm. šk. (26); 6. *Bački Petrovac* g. (32); 7. *Banatsko Veliko Selo*, osm. šk. (10); 8. *Banja Luka*, sr. teh. šk. (14), g. (6); 9. *Bečej*, g. (45); 10. *Bela Palanka*, g. (141); 11. *Beograd* 1. g. (23), 2. g. (61); 5. g. (14), 6. g. (107), 7. g. (103), 8. g. (40), 9. g. (58), 11. g. (345), 13. g. (75), 14. g. (33), 15. g. (158), 17. g. (64), građ. sr. šk. (62), ind. sr. teh. šk. (98), graf. ind. šk. (21); 12. *Bijeljina*, g. (8); 13. *Bitola*, g. (109); 14. *Bjelovar*, g. (63); 15. *Bogatić*, osm. šk. (12); 16. *Boljevac*, osm. šk. (10); 17. *Borski Rudnik*, g. (60); 18. *Bosilegrad*, g. (45); 19. *Brčko*, g. (22); 20. *Brežice*, g. (20); 21. *Celje*, 1. g. (15), 2. g. (26); 22. *Cetinje*, g. (75), 2. osm. šk. (75); 23. *Crikvenica*, g. (8); 24. *Čačak*, g. (175), 1. osm. šk. (10), 2. osm. šk. (30); 25. *Čuprija*,

g. (154); 26. *Daruvar*, g. (16); 27. *Delnice*, g. (35); 28. *Derventa*, g. (12); 29. *Dimitrovgrad*, g. (10); 30. *Đakovo*, g. (15); 31. *Doboj*, g. (49); 32. *Drvar*, g. (12); 33. *Dubrovnik*, uč. šk. (10); 34. *Gajdobra*, osm. šk. (11); 35. *Gevgelija*, g. (25); 36. *Goražde*, g. (70); 37. *Gornji Milanovac*, g. (20); 38. *Gostivar*, g. (17); 30. *Gračanica*, osm. šk. (9); 40. *Gradačac*, g. (37); 41. *Grahovo*, g. (10); 42. *Hercegnovi*, g. (44); 43. *Idrija*, g. (22); 44. *Imotski*, g. (3); 45. *Ivangrad*, g. (90); 46. *Jesenice*, g. (7); 47. *Kamnik*, g. (10); 48. *Karlovac*, g. (100); 49. *Kavadarci*, g. (30); 50. *Kičevo*, g. (28); 51. *Kikinda*, g. (58); 52. *Knin*, g. (18); 53. *Knjaževac*, g. (57); 54. *Kočevje*, g. (15); 55. *Koprivnica*, g. (70); 56. *Kragujevac*, 1. g. (116); 57. *Kraljevo*, g. (12); 58. *Krapina*, g. (31); 59. *Kranj*, g. (43); 60. *Križevci*, g. (33); 61. *Kruševac*, g. (153); 62. *Kumanovo*, g. (64); 63. *Leskovac*, g. (18); 64. *Listica*, g. (18); 65. *Loznica*, g. (2); 66. *Lukavac*, g. (40); 67. *Ljubljana*, 1. g. (17), 3. g. (12), 7. g. (28), 8. g. (17), 12. g. (9), kl. g. (34); 68. *Maribor*, 1. g. (30), 2. g. (10), kl. g. (24); 69. *Mladenovac*, g. (71), osm. šk. »M. Ž.« (15), osm. šk. (11); 70. *Mostar*, uč. šk. (30), g. (5), sr. teh. šk. (46); 71. *Našice*, g. (20); 72. *Negotin*, g. (67); 73. *Niš*, g. »S. Sr.« (100), g. »Sv. M.« (146), osm. šk. »Njegoš« (28); 74. *Nova Gradiška*, g. (47); 75. *Novi Kneževac*, osm. šk. (14); 76. *Novi Pazar*, g. (20); 77. *Novi Sad*, g. (138), g. »Sv. M.« (45), osm. šk. »I. L. Ribar« (29), osm. šk. »V. Stajić« (4); 78. *Novo Sarajevo*, g. (30); 79. *Ogulin*, g. (17); 80. *Osijek*, g. »I. L. Ribar« (72), 4. osm. šk. (21), sr. teh. šk. (60); 81. *Pakrac*, g. (45), uč. šk. (25); 82. *Pančevo*, g. (72); 83. *Pazin*, g. (4); 84. *Peć*, g. (48); 85. *Pirot*, g. (135); 86. *Plevlje*, g. (23); 87. *Ploče*, g. (26); 88. *Postojna*, g. (20); 89. *Posušje*, osm. šk. (20); 90. *Požarevac*, g. (150); 91. *Prijedor*, g. (38); 92. *Prilep*, g. (25): 93. *Priština*, g. (270); 94. *Prizren*, g. (57); 95. *Prnjavor*, osm. šk. (2); 96. *Ptuj*, g. (9); 97. *Pula*, uč. šk. (24), g. (42); 98. *Ravne na Koroškem*, g. (24); 99. *Rijeka*, 1. g. (51). 2. g. (33), uč. šk. (4); 100. *Rovinj*, g. (11); 101. *Ruma*, g. (173), osm. šk. »Zmaj J. J.« (4); 102. *Sarajevo*, 2. g. (76), 3. g. (13), 4. g. (134), kl. g. (41), sr. teh. šk. (16); 103. *Senta*, g. (51); 104. *Sesvete*, osm. šk. (10); 105. *Sinj*, g. (67); 106. *Sisak*, g. (28); 107. *Sjenica*, g. (17); 108. *Skopje*, g. »J. B. Tito« (85); *Slav. Požega*, g. (34); 109. *Slav. Brod*, g. (42); 110. *Smederevo*, g. (60), sr. teh. šk. (19); 111. *Sombor*, g. (190); 112. *Split*, 1. g. (43), 2. g. (50); 113. *Srbobran*, 1. osm. šk. (14); 114. *Sr. Mitrovica*, g. (75); *Sr. Karlovci*, g. (17); 115. *Srpske Moravice*, osm. šk. (4); 116. *Stari Bar*, g. (91); 117 *Subotica*, g. (282); 118. *Surdulica*, osm. šk. (20); 119. *Svetozarevo*, g. (98); 120. *Svilajnac*, g. (17); 121. *Šibenik*, g. (26); 122. *Šid*, g. (30); 123. *Titograd*, sr. teh. šk. (100); 124. *Titov Veles*, g. (186); 125. *Titova Korenica*, g. (18); 126. *Travnik*, g. (50); 127. *Trbolje*, g. (35): 128. *Trstenik*, g. (55); 129. *Tuzla*, g. (100); 130. *Ub*, uč. šk. (60); 131. *Uroševac*, ek. sr. šk. (12); 132. *Valjevo*, g. (69), sr. teh. šk. (44); 133. *Varaždin*, g. (282); 134. *Velika Gorica*, osm. šk. (3); 135. *Vinkovci*, g. (81); 136. *Virovitica*, g. (17); 137. *Visoko*, g. (25); 138. *Vlasotince*, g. (3); 139. *Vranje*, uč. šk. (2); 140. *Vrbas*, g. (8); 141. *Vršac*, g. (42); 142. *Vukovar*, g. (65); 143. *Zagreb*, kl. g. (43), 1. g. (186), 2. g. (121), 3. g. (113), 4. g. (101), 5. g. (52), 6. g. (66), 7. g. (138), 8. g. (158), 9. g. (185), 2. osm. šk. ul. A. Kov. (27), 2. osm. šk. Kaptol (19). 2. osm. šk. Kršnj. ul. (2), 2. osm. šk. Rapska (11), 14. osm. šk. (32), 2. učit. šk. (17), teh. šk. kem. odj. (8), teh. šk. str. odj. (33), osm. šk. Jordanovac (11); 144. *Zadar*, g. (49); 145. *Zaječar*, g. (66); 146. *Zemun*, 1. g. (129), 2. g. (127); 147. *Zenica*, g. (83); 148. *Zrenjanin*, 1. g. (83), 2. g. (62).

Naknadno stigla rješenja:

Mandić Mile, uč. 8a r. g. »F. Višnjić« Bijeljina, 240, 241, 242, 244, 245, 247 (djel.) 250, 252;
Симић Драгана, уч. 8_3 р. г. Ћуприја, 244, 250, 251.